ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 12 Juni 1932 Heft 3

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Bestimmung des Sicherheitsgrades einfach statisch unbestimmter Fachwerke.

Von *Ernst Melan* in Wien.

1. Der Sicherheitsgrad eines statisch unbestimmten Fachwerkes. Läßt man alle äußeren Kräfte, welche auf eine Tragkonstruktion einwirken, proportional wachsen, so wird bei einem bestimmten Vielfachen der gegebenen Belastung das System unbrauchbar, das heißt, es werden Formänderungen desselben ohne Aufwand äußerer Arbeit möglich. Man nennt den Faktor, mit welchem die tatsächlich einwirkende Belastung zu multiplizieren ist, damit dies eintritt, den Sicherheitsgrad der betreffenden Konstruktion.

Bei einem statisch bestimmten System ist die Bestimmung des Sicherheitsgrades sehr einfach. Speziell bei einem statisch bestimmten Fachwerk ist der Sicherheitsgrad der ganzen Konstruktion gleich dem des schwächsten Stabes. Denn ein statisch bestimmtes Fachwerk hat gerade nur so viele Stäbe als unbedingt notwendig sind, um die gegenseitige Lage der Knoten festzulegen. Ist also ein einziger Stab unbrauchbar geworden, d. h. sind Änderungen seiner Länge und damit der Entfernung der beiden durch ihn verbundenen Knoten möglich, ohne daß die Stabkraft wächst, so ist das ganze Fachwerk unbrauchbar geworden.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse bei einem statisch unbestimmten Fachwerk. Damit ein r-fach statisch unbestimmtes Fachwerk unbrauchbar wird, ist es im allgemeinen notwendig, daß $r+1$ Stäbe unbrauchbar werden. Denn ein solches System hat ja r Stäbe mehr, als zur Festlegung der gegenseitigen Lage der Knoten notwendig sind. Es müssen daher, keine Häufungsstellen der Stäbe vorausgesetzt, $r+1$ Stäbe unbrauchbar werden, damit der Rest des Fachwerkes unbrauchbar wird.

Man pflegt in der Praxis dem Erfordernis eines bestimmten Sicherheitsgrades in der Weise Rechnung zu tragen, daß man eine „zulässige" Spannung vorschreibt, welche einen Bruchteil, etwa $\frac{1}{n}$ jener beträgt, bei welcher der betreffende Stab unbrauchbar wird. Bei einem statisch bestimmten Fachwerk ist hiermit auch der Sicherheitsgrad des ganzen Systemes, nämlich gleich n, gegeben, wenn die zulässige Spannung auch nur in einem einzigen Stabe erreicht wird. Bei einem r-fach statisch unbestimmten Fachwerk ist es aber notwendig, daß die zulässige Spannung im allgemeinen in mindestens $r+1$ Stäben erreicht

wird. Denn dann erst werden bei Anwachsen der Belastung auf den n-fachen Wert $r+1$ Stäbe und damit das System unbrauchbar, der Sicherheitsgrad somit gleich n sein[1]).

Ist die Bedingung, daß in $r+1$ Stäben die zulässige Spannung erreicht wird, wie dies häufig der Fall ist, nicht erfüllt, so kann aus der zulässigen Spannung nicht ohne weiteres auf den Sicherheitsgrad der Konstruktion geschlossen werden. Es ist vielmehr die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung, den Sicherheitsgrad eines solchen Fachwerkes zu bestimmen, wobei wir uns überdies auf einfach statisch unbestimmte Fachwerke beschränken wollen.

Zunächst sei die Voraussetzung gemacht, daß zwischen der Änderung des Abstandes der beiden Knoten eines Stabes und seiner Stabkraft der in Abb. 1 dargestellte Zusammenhang bestehe. Nach anfänglicher Proportionalität zwischen Längenänderung und Stabkraft, also nach rein elastischem Verhalten des Materiales, folgt nach Erreichen der Traggrenze bei $\Delta s'$ ein Bereich, in welchem die Stabkraft den konstanten Wert T besitzt, um schließlich nach Erreichen des Wertes $\Delta s''$ der Längenänderung auf Null zu sinken. Das Verhältnis der Längenänderung an dieser Stelle zu jener an der Traggrenze sei mit φ bezeichnet. Für einen Zugstab entspricht unsere Annahme einem idealplastischen Baustoff, und Abb. 1 ist bis auf den Maßstab mit der Spannungs-Dehnungs-Kurve identisch. Der Wert von φ beträgt für Eisen, das als Baustoff fast ausschließlich in Frage kommt, ungefähr 200. Für Druckstäbe nehmen wir prinzipiell denselben Zusammenhang zwischen Längenänderung und Stabkraft an. Natürlich wird im allgemeinen mit Rücksicht auf die Knickung die Tragfähigkeit für Druck, T', kleiner sein wie für Zug. Aber auch der Wert von φ ist hier viel kleiner, ja er kann selbst gleich 1 werden, wenn der Stab nach Erreichen der Knicklast sich sofort gänzlich ausschaltet und überhaupt die Fähigkeit verloren hat, eine Kraft zu übernehmen.

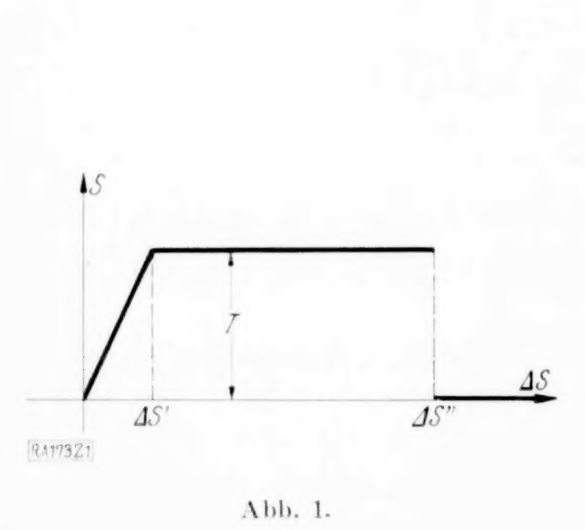


Abb. 1.

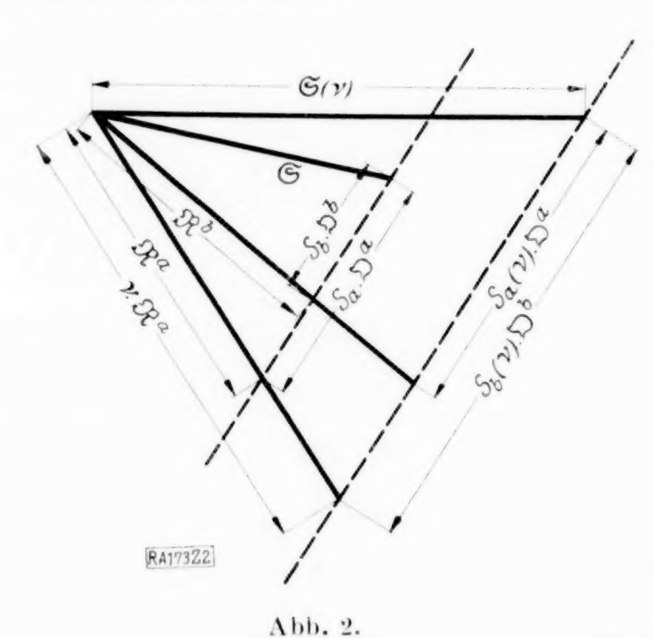


Abb. 2.

Nach den eingangs getroffenen Festsetzungen wird ein Stab bei Erreichen der Traggrenze unbrauchbar.

2. Die Stabkräfte eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes nach Erreichen der Traggrenze eines Stabes. Die Stabkraft in dem Stabe i eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes mit n Stäben kann bekanntlich durch die Gleichung

$$S_i = R_i^a + S_a\, Q_i^a \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dargestellt werden. Darin bedeuten die R_i^a die Stabkräfte im Grundsystem, d. h. jenem statisch bestimmten Fachwerk, welches man durch Durchschneiden des überzähligen Stabes a erhält, S_a die Stabkraft in dem überzähligen Stabe a und Q_i^a die Stabkräfte im Grundsystem, wenn $S_a = 1$ gesetzt wird. Es ist also speziell $R_a^a = 0$ und $Q_a^a = 1$.

Ordnen wir den n Werten S_i, R_i^a und Q_i^a die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}^a$ $\mathfrak{Q}^a$ in einem n-dimensionalen Raume zu, so kann das vorstehende Gleichungssystem (1) durch die einzige Gleichung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^a + S_a\, \mathfrak{Q}^a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

ersetzt werden, d. h. die Endpunkte aller Vektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}^a$ liegen auf einer Geraden $\mathfrak{g}$, welche die Richtung von $\mathfrak{Q}^a$ hat. Nachdem bei der Wahl eines anderen Stabes, etwa des

[1]) Um Mißverständnisse auszuschließen, sei darauf hingewiesen, daß das Verhalten eines statisch unbestimmten Fachwerkes bei wiederholter Belastung und Entlastung nicht Gegenstand dieser Untersuchung ist. Ebenso ist auf Gleichgewichtszustände, welche nach dem Erreichen der Traggrenze in $r+1$ Stäben — auf Grund unserer Annahmen allerdings nur bei unstetiger Änderung der Verschiebungen — möglich sind, nicht Rücksicht genommen.

Stabes b, offenbar dieselben Stabkräfte und daher auch derselbe Vektor $\mathfrak{S}$ sich ergeben müssen, gilt

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^b + S_b\,\mathfrak{Q}^b$$

und die sich jetzt ergebende Gerade, die die Richtung von $\mathfrak{Q}^b$ hat, muß mit der vorerwähnten Geraden $\mathfrak{g}$ identisch sein. Demnach haben alle $\mathfrak{Q}^i$ dieselbe Richtung, es ist also

$$\mathfrak{Q}^a = \lambda_b^a\,\mathfrak{Q}^b \quad \ldots \quad (2)$$

und auch

$$Q_i^a = \lambda_b^a\,Q_i^b$$

für jedes i, und wenn speziell $i = b$ gesetzt wird, wird wegen $Q_b^b = 1$:

$$\lambda_b^a = Q_b^a \quad \text{und} \quad Q_i^a = Q_b^a\,Q_i^b \quad \ldots \quad (2a)$$

und insbesondere

$$Q_b^a\,Q_a^b = 1\,.$$

In dem erwähnten n-dimensionalen Raume liegen daher alle $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ in einer Ebene η, welche durch die Gerade $\mathfrak{g}$ und den Ursprung gegeben ist. Die Vektoren $\mathfrak{R}^k$ fallen in die Schnittgeraden dieser Ebene η mit den Hyperebenen $S_k = 0$, da ja $R_k^k = 0$ ist.

Wächst die gegebene Belastung, für welche $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ bestimmt wurden, auf den ν-fachen Wert, so gilt

$$\mathfrak{S}(\nu) = \nu\,\mathfrak{R}^a + S_a(\nu)\,\mathfrak{Q}^a \quad \ldots \quad (3),$$

denn die Stabkräfte im Grundsystem erhalten jetzt den ν-fachen Wert $\nu\,R_i^a$, während die Q_i^a unverändert bleiben. An Stelle der Geraden $\mathfrak{g}$ tritt jetzt die zu ihr parallele $\mathfrak{g}(\nu)$, welche, da $\nu\,\mathfrak{R}^a$ dieselbe Richtung wie $\mathfrak{R}^a$ hat, ebenfalls in der Ebene η liegt. Abb. 2 zeigt die Ebene η mit den ihr liegenden Vektoren $\mathfrak{S}(\nu)$ und $\nu\,\mathfrak{R}$ und der Geraden $\mathfrak{g}(\nu)$.

Erweitern wir nun unseren n-dimensionalen Raum durch Hinzunahme einer neuen Richtung, in welcher wir die Werte von ν auftragen, zu einem $n+1$ dimensionalen, so stellt die Gl. (3) in diesem Raume eine Ebene ε vor, welche wir uns durch die Projektion der Geraden $\mathfrak{g}$ in $\nu = 1$ aus dem Ursprung entstanden denken können. Wir wollen diese Ebene durch zwei in ihr liegende Gerade, die durch den Ursprung gehen, darstellen, und können sofort ein solches Geradenpaar angeben. Wir brauchen dazu bloß die Endpunkte von $\mathfrak{R}^a$ und $\mathfrak{S}$ in $\nu = 1$ mit dem Ursprung zu verbinden und erhalten so die Geraden $\mathfrak{r}^a$ und $\mathfrak{f}$. Anstatt der Geraden $\mathfrak{f}$ können wir aber auch die Gerade $\mathfrak{r}^b$ verwenden, die durch die Verbindung des Endpunktes von $\mathfrak{R}^b$ mit dem Ursprung entsteht.

Es soll nun der geometrische Ort aller Endpunkte von $\mathfrak{S}(\nu)$ in der Ebene ε bestimmt werden, wenn sich der Wert von ν ändert. Zunächst sei bemerkt, daß in praktisch vorkommenden Fällen das Fachwerk stets so dimensioniert ist, daß die Stabkräfte S_i bei der tatsächlich vorhandenen Belastung immer in jenem Bereiche liegen, wo zwischen Längenänderung und Stabkraft Proportionalität besteht. In diesem Falle berechnet sich die überzählige Stabkraft bekanntlich aus der Gleichung

$$S_a(\nu) = -\frac{\nu\,\Sigma\,R_i^a\,Q_i^a\,\dfrac{e_i}{F_i}}{\Sigma\,Q_i^{a2}\,\dfrac{e_i}{F_i}} \quad \ldots \quad (4),$$

worin F_i und e_i Querschnittsfläche und Länge des Stabes i bedeutet und damit wird

$$\mathfrak{S}(\nu) = \nu\,\mathfrak{S}.$$

Somit ergeben die Koordinaten der oben erwähnten Geraden $\mathfrak{f}$ an der Stelle ν die Werte von $S_i(\nu) = \nu\,S_i$.

Hat aber etwa der Stab j die Traggrenze erreicht, so gilt die Gl. (4) nicht mehr. An ihre Stelle tritt jetzt gemäß der Voraussetzung eines ideal plastischen Materiales die Bedingung

$$S_j(\nu) = T_j = \text{const} \quad \ldots \quad (5),$$

welche in Verbindung mit Gl. (3) besagt, daß die Endpunkte von $\mathfrak{S}(\nu)$ nunmehr auf dem Schnittgebilde der Hyperebene $S_j(\nu) = \text{const}$ mit der Ebene ε liegen. Dieses Schnittgebilde ist die Gerade $\mathfrak{j}$; denn die Hyperebene eines Raumes schneidet sich mit einer Ebene in einer Geraden. Hat also ein Stab die Traggrenze erreicht, so tritt an Stelle der Geraden $\mathfrak{f}$ die Gerade $\mathfrak{j}$. ν kann nun noch so lange weiter wachsen, bis noch ein zweiter Stab die Traggrenze erreicht. Ist dies der Stab l, so brauchen wir bloß nachzusehen, wo sich die Gerade $\mathfrak{j}$ mit $\mathfrak{l}$

schneidet. Die Gerade $\mathfrak{l}$ ist die Schnittgerade der Hyperebene $S_l(\nu) = T_l =$ const mit der Ebene ε und die Abszisse ν_{jl} des Schnittpunktes von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{l}$ ist der Sicherheitsgrad des Systemes.

Denkt man sich die Schnittgeraden aller Hyperebenen mit der Ebene ε konstruiert, so wird aus der Ebene ε ein Polygon herausgeschnitten, in dessen Inneren der Koordinatenursprung liegt. Dabei interessiert, wenn man ausschließt, daß die äußeren Kräfte ihren Richtungssinn umkehren, nur jener Teil des Polygones, welcher auf der Seite positiver ν liegt. Für unseren Zweck ist es ferner ausreichend, wenn wir die Projektion des Polygones in einer beliebigen νk-Ebene kennen, denn es kommt ja nur auf die Koordinaten ν_{pq} der Polygonecken an.

Auf Grund dieser Überlegungen können wir mittels eines einfachen zeichnerischen Verfahrens zum Ziele kommen. Zu diesem Zwecke stellen wir den $n+1$ dimensionalen Raum, welcher, wie schon erwähnt, durch die n Werte von S_i und die Werte von ν gebildet wird, mittels seiner n Projektionen in die νi-Ebenen dar. Tragen wir an der Stelle $\nu = 1$ jedesmal die Werte von R_i^a und S_i oder statt letzterem auch von R_i^b auf, und verbinden die Endpunkte mit dem Ursprung, so erhalten wir die Bilder r_i^a und s_i, bzw. r_i^b der Geraden $\mathfrak{r}^a$ und $\mathfrak{s}$ oder $\mathfrak{r}^b$, wodurch die Ebene ε festgelegt ist. Um diese Ebene mit der Hyperebene $S_i(\nu) =$ const zu schneiden, beachten wir, daß die Projektion der Schnittgeraden $\mathfrak{i}$ in der νi-Ebene einfach als Parallele i_i im Abstande T_i zur ν-Achse erhalten wird. Will man also die Projektion des Polygones in der k-Ebene bestimmen, so braucht man bloß die Schnittpunkte von i_i mit den beiden Geradenbildern in der νi-Ebene auf die Geradenbilder in der νk-Ebene zu projizieren. Die Verbindung dieser beiden Punkte gibt das Bild i_k der Geraden $\mathfrak{i}$ in der νk-Ebene. Verfährt man mit allen Stäben auf diese Weise, so erhält man die Projektion des Polygones in der νk-Ebene. Natürlich müssen sich — und das wird in der Regel der Fall sein, nicht alle Stäbe mit ihren Schnittgeraden an der Umrandung des Polygones beteiligen.

In Abb. 3 ist außer der νk-Ebene, welche für die Projektion des Polygones gewählt wurde, von den anderen Projektionsebenen des $n+1$ dimensionalen Raumes nur noch die die νi-Ebene darstellt. Die Konstruktion der übrigen Polygonseiten hat ebenso wie für i_k und i_k' zu geschehen.

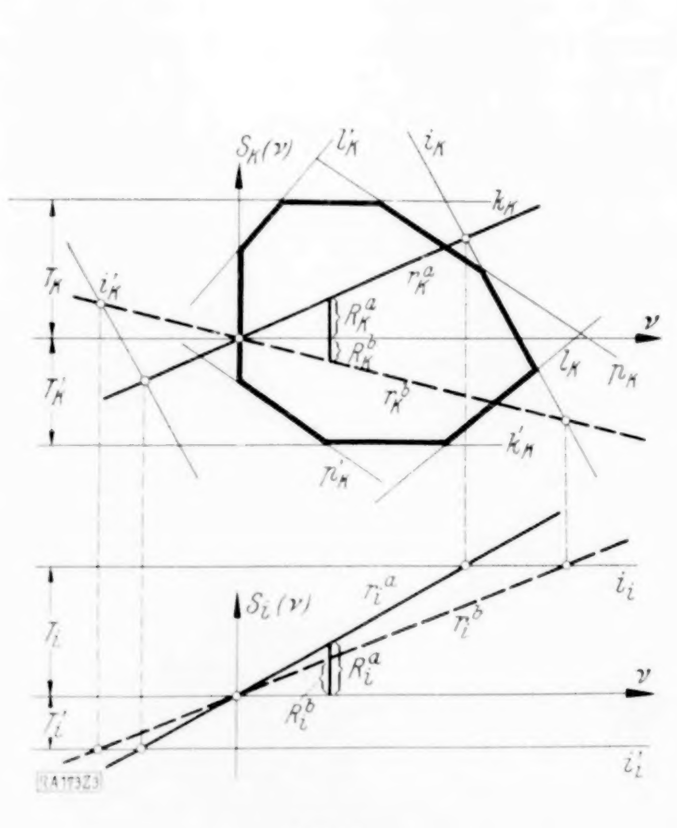


Abb. 3.

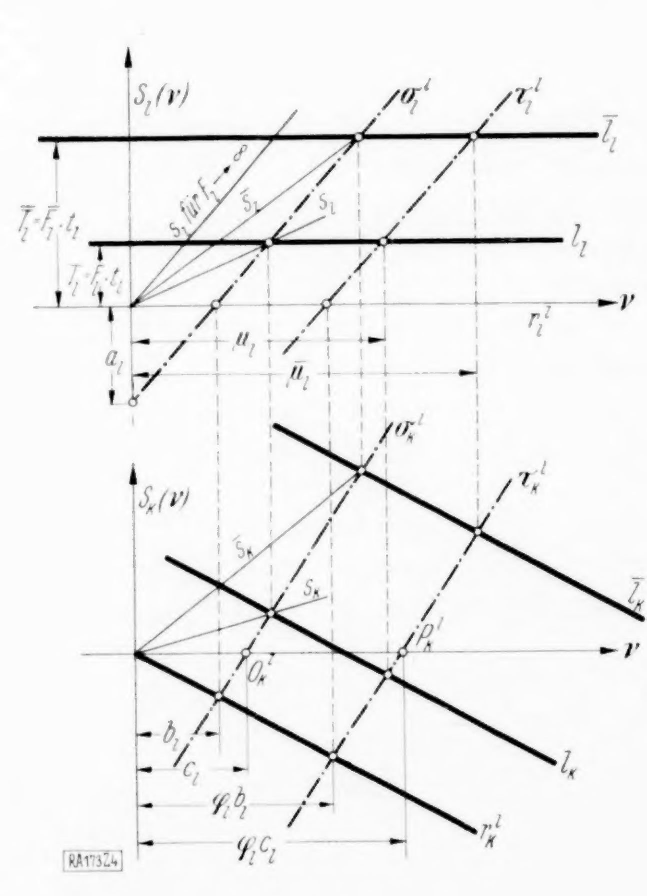


Abb. 4.

Wir können nun leicht für jeden Wert der S_i den Sicherheitsgrad des Fachwerkes angeben. Dazu zeichnen wir uns das Bild s_k der Geraden $\mathfrak{s}$, indem wir in $\nu = 1$ den Wert von S_k auftragen und mit dem Ursprung verbinden. Die so erhaltene Gerade s_k gilt bis zu ihrem Schnittpunkt mit einer der Polygonseiten, etwa mit p_k. Von hier an ist dann der zu dieser Polygonseite gehörige Stab p an der Traggrenze angelangt. Mit weiter wachsendem ν geben die Ordinaten von p_k den Wert von $S_k(\nu)$ an, bis bei Erreichen der nächsten Polygonecke, die etwa von p_k mit q_k gebildet wird, nun auch der Stab q an die Traggrenze gelangt ist; damit ist das Fachwerk unbrauchbar geworden. Der Sicherheitsgrad des Systemes ist also durch die Abszisse jener Polygonecken gegeben, welche im Sinne wachsender ν dem Schnittpunkt von s_k unmittelbar folgt.

3. Die Abhängigkeit des Sicherheitsgrades von den Stabquerschnitten. Zur Lösung einer Aufgabe, welche einige praktische Bedeutung besitzt, wollen wir untersuchen, wie sich der Vektor $\mathfrak{S}$ ändert, wenn wir die Fläche F_l eines Stabes l ändern. Nehmen wir diesen Stab vorderhand als den überzähligen Stab an, so gilt, wie schon erwähnt,

$$S_l = -\frac{\Sigma R_i^l Q_i^l \frac{e_i}{F_i}}{\Sigma Q_i^{l2} \frac{e_i}{F_i}} = \frac{\frac{1}{b_l}}{\frac{1}{a_l} + \frac{1}{T_l}} \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

wenn wir

$$b_l = -\frac{e_l t_l}{\Sigma R_i^l Q_i^l \frac{e_i}{F_i}} \quad \text{und} \quad a_l = \frac{e_2 t_2}{\Sigma Q_i^{l2} \frac{S_i}{F_i}} \quad \ldots \ldots \quad (6a)$$

gesetzt haben. Dabei bedeutet $t_l = \frac{T_l}{F_l}$ die Spannung an der Traggrenze im Stabe l. Die Summen in a_l und b_l erstrecken sich über alle Stäbe des Fachwerkes mit Ausnahme des Stabes l, sie sind demnach von F_l unabhängig. b_l ist überdies stets positiv, weil $\frac{1}{a_l} + \frac{1}{T_l}$ dasselbe Vorzeichen wie S_l hat. Wenn also zwei zusammengehörige Werte von S_l und F_l, oder, was dasselbe ist, von S_l und T_l, also etwa S_l', T_l' und S_l'' T_l'' gegeben sind, so kann man, konstantes t_l vorausgesetzt, für jedes T_l das zugehörige S_l aus der Tatsache finden, daß sich gemäß der Gl. (6) alle Geraden s_l mit den zugehörigen l_l, d. i. den im Abstande T_l Parallelen zur ν-Achse auf einer Geraden σ_l^l schneiden. σ_l^l kann natürlich auch so bestimmt werden, daß man den Abstand b_l auf der Abszissenachse aufträgt; die Neigung von σ_l^l ist dann $\frac{a_l}{b_l}$ und σ_l^l ist zu s_l für $F_l \to \infty$ parallel.

Nachdem die Geraden σ_l^l als Bild einer Geraden σ^l in dem $n+1$ dimensionalen Raum aufgefaßt werden kann, kann die Konstruktion, wie auch aus Abb. 4 ersichtlich, in jeder beliebigen Projektionsebene durchgeführt werden.

Es soll noch untersucht werden, wie sich die Lage von der Geraden σ^l mit der Fläche F_i eines beliebigen Stabes i ändert. Setzt man den Wert von $\Sigma R_j^l Q_j^l \frac{e_j}{F_j}$ aus der Gleichung $S_l = -\frac{\Sigma R_j^l Q_j^l \frac{e_j}{F_j}}{\Sigma Q_j^{l2} \frac{e_j}{F_j}}$ in Gl. (6a) ein, so ergibt sich für b_l der Wert

$$b_l = \frac{e_l t_l}{S_l \Sigma Q_j^{l2} \frac{e_j}{F_j}}.$$

Analog wird

$$b_i = \frac{e_i t_i}{S_i \Sigma Q_j^{i2} \frac{e_j}{F_j}},$$

wobei sich die Summen in den Nennern beider Ausdrücke über alle Stäbe erstrecken. Nachdem nach Gl. (2a)

$$\frac{Q_j^{i2}}{Q_j^{l2}} = \frac{Q_l^i}{Q_i^l}$$

ist, folgt für b_l hiermit der Wert

$$b_l = \frac{e_l t_l S_i Q_l^i}{e_i t_i S_l Q_i^l} \cdot b_i = c \frac{a S_i Q_l^i}{a S_l Q_i^l} \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

worin c den konstanten Wert $c = \frac{e_l t_l}{e_i t_i} b_i$ bedeutet, da b_i ebenso wie e_i t_i und e_l t_l von F_i unabhängig ist. In Abb. 5 sind die Projektionen auf die $\nu\, l$-Ebene und $\nu\, i$-Ebene dargestellt. Wählt für a die Abzisse des Schnittpunktes der Geraden l und σ^l, so wird $a S_l Q_i^l$ von der Lage von σ^l unabhängig und b_l nach Gl. (7) proportional dem Werte $a S_i Q_l^i$; aus der Abb. 5

erkennt man leicht an Hand der zu zwei verschiedenen Werten F_i und F_i' eingetragenen Konstruktion, daß sich die Gerade σ_l^l um den Punkt O_l^l, d. i. um ihren Schnittpunkt mit r_l^i drehen muß, wenn sich F_i ändert. In dem $n+1$ dimensionalen Raum dreht sich also σ^l um O^l und deshalb in jeder beliebigen Projektionsebene das Bild σ_k^l um das Bild O_k^l. Die Abszisse von O^l sei $\nu = c_l$.

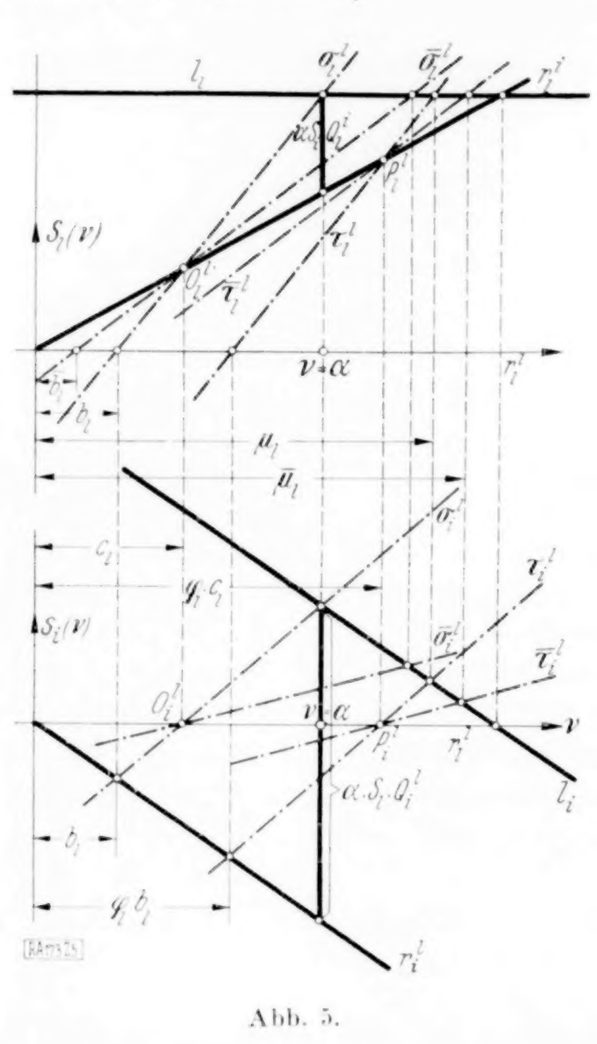


Abb. 5.

Abb. 6.

4. Stabdehnungen nach Erreichen der Traggrenze eines Stabes. Es ist möglich, daß der schwächste Stab, etwa der Stab l, welcher zuerst an die Traggrenze gelangt ist, überhaupt keine Kraft aufnehmen kann, bevor noch ein zweiter Stab an die Traggrenze kommt, also bevor noch die nächste Polygonecke erreicht wird. Wir sind aber mittels unseres Polygones sofort in der Lage, den Sicherheitsgrad des noch übrigbleibenden statisch bestimmten Fachwerkes anzugeben. Wenn das Polygon in die $\nu\,i$-Ebene projiziert wurde, braucht man bloß nachzusehen, wo die zu l_i Parallele durch den Ursprung, also r_i^l das Polygon schneidet, und die Abszisse dieses Schnittpunktes gibt dann den gesuchten Sicherheitsgrad an. Denn wenn der Stab l keine Kraft mehr aufnehmen kann, also $S_l(\nu) = 0$ wird, muß $\mathfrak{R}^l$ mit $\mathfrak{S}(\nu)$ zusammenfallen, da ja dann mit R_l^l auch S_l verschwindet. Es fallen also alle s_k mit den r_k^l, demnach auch s_i mit r_i^l zusammen.

Es kommt also darauf an, jenen Wert $\nu = \mu_l$ zu bestimmen, bei welchem der Stab l die Bruchdehnung erreicht. Die Längenänderung des Stabes l erhält man am einfachsten aus der bekannten Beziehung

$$\Sigma Q_j^l \Delta e_j = 0,$$

worin Δe_j die Längenänderungen der einzelnen Stäbe bedeutet. Hieraus ergibt sich wegen $Q_l^l = 1$

$$\Delta e_l = -\Sigma Q_j^l \Delta e_j,$$

so daß die Summe über alle Stäbe mit Ausnahme des Stabes l sich erstreckt. Da voraussetzungsgemäß nur der Stab l die Traggrenze erreicht hat, alle anderen Stäbe rein elastisches Verhalten besitzen, wird

$$\Delta e_j = \frac{\mu_l R_j^l + T_l Q_j^l}{E F_j} e_j$$

und daher wird das Verhältnis q_l der Stablängenänderung an der Bruchgrenze zu jener an der Traggrenze

$$q_l = \frac{E \Delta e_l}{t_l e_l} = \mu_l \frac{1}{b_l} - T_l \frac{1}{a_l},$$

worin b_l und a_l dieselbe Bedeutung wie in Gl. (6a) besitzen und E den Elastizitätsmodul bedeutet. Hiermit ergibt sich für den Wert $\nu = \mu_l$, bei welchem der Stab l überhaupt keine Kraft mehr aufnehmen kann, die Gleichung

$$\mu_l = \varphi_l\, b_l + T_l\, \frac{b_l}{a_l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Sonach hat man bloß zu der Geraden σ_l^l eine Parallele τ_l^l zu ziehen, welche auf der Abszissenachse den Abschnitt $\varphi_l\, b_l$ besitzt. Der Schnittpunkt von τ_l^l mit der Geraden l_l hat dann den gesuchten Wert μ_l als Abszisse. Auch diese Konstruktion kann in jeder beliebigen Projektionsebene durchgeführt werden, wie dies in Abb. 4 gezeigt ist.

Ändert sich die Fläche F_i eines beliebigen anderen Stabes i, so dreht sich auch die Gerade τ^l um einen Punkt. Die Abszisse dieses Punktes P^l, welcher auf $\mathfrak{r}^i$, bzw. dessen Bilder P_k^l auf den Bildern r_k^i liegen, beträgt $c_l\, \varphi_l$.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen den Werten von μ_l und der veränderlichen Fläche F_i des Stabes i bei unveränderlicher Fläche F_l feststellen, indem auf den zu den Werten von F_i gemäß der Gleichung $T_i = F_i\, t_i$ gehörigen Geraden i jeweils der Punkt mit der Abzisse μ_l angegeben wird. In Abb. 6 ist die Projektion auf die $\nu\, i$-Ebene dargestellt, so daß μ_l jeweils auf dem zugehörigen i_i liegt. Zunächst sind die beiden zu der konstanten Fläche F_l gehörenden Geraden l_i und σ_i^i eingetragen, die nach früherem ermittelt worden sind. Der Punkt O_i^l, durch den das Geradenbüschel der σ_l^i gehen muß, ist hier wie folgt bestimmt worden. Zuerst ist die Gerade s_i^{**} durch Verbinden des Punktes mit den Koordinaten $\nu = 1$ und $\boldsymbol{S}_i^{**}$, das ist der Stabkraft S_i für $F_i \to \infty$ und $F_l \to \infty$ bei der gegebenen Belastung, mit dem Ursprung eingezeichnet. Dann ist s_i^*, welches zu den Werten $F_i \to \infty$ und F_l gehört, als Parallele zu σ_i^i erhalten. Zieht man nun durch den Schnittpunkt von s_i^* mit l_i die Parallele zu s_i^{**}, so ist dies bereits jenes σ_i^{l*}, das zu $F_i \to \infty$ gehört. Denn auf diesem σ_i^{l*} müssen sich bei konstantem $F_i \to \infty$ jeweils bei veränderlichem F_l einander zugeordnete Werte von s_i und l_i schneiden, und wir haben durch zwei Paare solcher Werte, nämlich s_i^* und l_i für das gegebene F_l und s_i^{**} für $F_l \to \infty$ die Gerade σ_i^{l*} festgelegt. Ihr Schnittpunkt mit r_i^i, welches hier mit der ν-Achse zusammenfällt, ist der gesuchte Punkt O_i^l, durch den alle σ_i^l für verschiedene F_i gehen müssen. Durch den Punkt P_i^l mit der Abszisse $\varphi_l\, c_l$ geht dann das Geradenbüschel der zu σ_i^l parallelen τ_i^l. Man kann sich aber das Zeichnen der beiden Geradenbüschel der σ_i^l und τ_i^l ersparen, wenn man durch den Schnittpunkt von τ_i^{l*} und l_i die Parallele ξ_i^* zu s_i^* zieht und durch deren Schnittpunkt N_i^l mit r_i^i ein Geradenbüschel ξ_i parallel zu den zugehörigen s_i legt. Die Schnittpunkte von l_i mit ξ_i sind dann mit denen der τ_i^l identisch; projiziert man sie schließlich auf die zugehörigen i_i, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel, deren Koordinaten einander zugeordnete Werte von μ_l und T_i, also auch F_i sind. Die Assymptoten der Hyperbel können, wie aus Abb. 6 ersichtlich, leicht gefunden werden. Der Schnittpunkt von l_i mit r_i^l ist ein Punkt der Hyperbel. Da der Stab l nur dann als erster Stab an die Traggrenze kommt, wenn i über dem Schnittpunkt von l_i mit σ_i^i liegt, so kommt nur jener Teil der Hyperbel in Frage, bei dem die Ordinaten der Hyperbel größer sind, als die Ordinate T_{i_1} des erwähnten Punktes.

5. Die Abhängigkeit des Sicherheitsgrades von den Stabquerschnitten. Wir sind nun in der Lage, den Sicherheitsgrad eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes als Funktion der Fläche eines Stabes anzugeben. Es kommt häufig vor, daß ein solches System durch Weglassen eines Stabes als statisch bestimmtes Fachwerk berechnet wird. Es ist nun die Frage, ob durch das nachträgliche Einfügen eines Stabes der Sicherheitsgrad vergrößert oder verkleinert wird.

Wir wollen annehmen, daß die Fläche F_p des Stabes p von Null bis Unendlich wächst und verfahren wie folgt, um den Sicherheitsgrad zu bestimmen, welcher zu einem beliebigen Werte von F_p gehört. Zunächst zeichnen wir die Projektion des Polygones in die $\nu\, p$-Ebene. Trägt man die Gerade σ_p^p ein, so kann man nach früherem für jedes F_p die dazugehörige Lage von s_p angeben, da ja F_p der Tragkraft T_p bzw. T_p' proportional ist, und man erhält die noch fehlenden Polygonseiten p_p und p_p', als Parallele zur ν-Achse in den Abständen $T_p = F_p\, t_p$ und $T_p' = F_p\, t_p'$. Man erkennt, daß der Stab p dann als erster Stab an die Traggrenze kommt, wenn die Gerade σ_p^p im Inneren des Polygones liegt. Die Koordinaten der Polygonseite $\boldsymbol{m}_p$ werden daher in dem in Abb. 7 dargestellten Fall einander zugeordnete

Werte von T_p bzw. F_p und des Sicherheitsgrades darstellen. Allerdings ist es möglich, daß sich der Stab schon früher ausschaltet, wie dies in Abb. 7 zwischen den Werten $F_{p0} = 0$ und F_{p1} der Fall ist, da hier die Gerade τ_p^p ebenfalls im Inneren des Polygones liegt. Dann kommt der Sicherheitsgrad des übrigbleibenden statisch bestimmten Systemes, welchem der Stab p fehlt, in Frage, der also bis zum Schnittpunkt von τ_p^p mit m_p konstant bleibt. Erst für Flächen zwischen F_{p1} und F_{p2} ist der Sicherheitsgrad durch die Abszissen der Polygonseite m_p dargestellt. In diesem Bereiche tritt Unbrauchbarkeit des Systemes in der Weise ein, daß zuerst der Stab p, dann der Stab m an die Traggrenze gelangt.

Wächst die Fläche F_p weiter, so kommt als erster Stab der Stab m an die Traggrenze, als zweiter zunächst, d. i. für Werte von F_p zwischen F_{p2} und F_{p3}, der Stab p; dabei wechselt die Stabkraft S_p (ν) jedoch ihr Vorzeichen. Der Sicherheitsgrad des Systemes ist jetzt durch den Schnittpunkt von p_p' mit m_p gegeben, welcher aber aus Zweckmäßigkeitsgründen auf die Gerade p_p, die zu demselben F_p wie p_p' gehört, projiziert ist. Dies gilt bis F_{p3}; von da an bleibt die Sicherheit bis F_{p4} konstant, da der Schnittpunkt von m_p mit n_p nunmehr für den Sicherheitsgrad maßgebend ist. Das System wird hier dadurch unbrauchbar, daß zuerst der Stab m, dann der Stab n an die Traggrenze gelangt. Wächst schließlich F_p noch weiter bis zu einem unendlich großen Wert, hat also schließlich s_p die Richtung von σ_p^p, so stellt die Abszisse des Schnittpunktes von q_p mit m_p den Sicherheitsgrad vor, da jetzt zuerst der Stab q, dann der Stab m die Traggrenze erreicht.

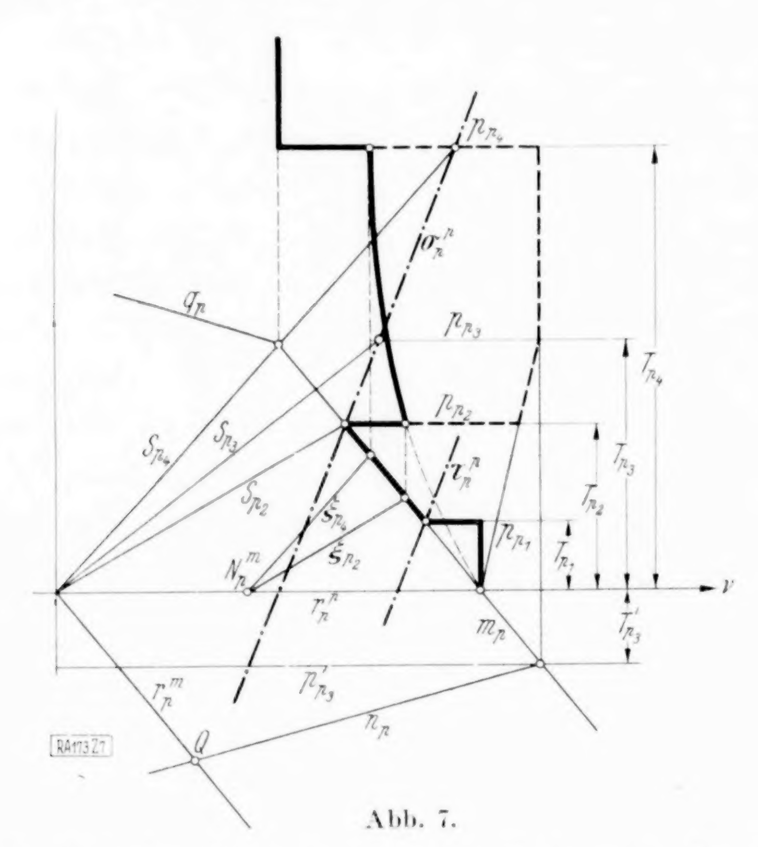


Abb. 7.

Es ist noch möglich, daß der Stab m und der Stab q an die Bruchgrenze kommen, bevor noch der zweite Stab die Traggrenze erreicht hat. Um sich bezüglich des Stabes m, bei welchem dies in dem Intervall zwischen F_{p2} und F_{p4} der Fall sein kann, hierüber Klarheit zu verschaffen, ist die früher erwähnte Hyperbel für diesen Stab gemäß dem in Abb. 6 dargestellten Verfahren einzuzeichnen. Man sieht, daß in dem vorliegenden Falle durch das Erreichen der Bruchdehnung des Stabes m in dem ganzen Intervall von F_{p2} bis F_{p4} der Sicherheitsgrad heruntergesetzt wird, da das statisch bestimmte Fachwerk, das durch Ausschalten des Stabes m entstanden ist, eine kleinere Sicherheit besitzt, die durch die Abszisse des Punktes Q gegeben ist. Es ist aber möglich, die Belastung auf jenes Vielfache ν zu steigern, das durch die Abszissen der Hyperbel gegeben ist, und die Koordinaten der Hyperbel stellen also einander zugeordnete Werte des Sicherheitsgrades ν und der Fläche F_p vor. Eine derartige Verminderung des Sicherheitsgrades infolge der Bruchdehnung kommt im allgemeinen nur bei Druckstäben in Frage, da für Zugstäbe der Wert von φ viel zu groß ist, als daß die Bruchgrenze des ersten Stabes vor der Traggrenze des zweiten Stabes erreicht wird. Dies ist auch der Grund, warum statisch unbestimmte Systeme in den allerseltensten Fällen durch Zerreißen eines Zugstabes zugrunde gehen. Man sieht aber auch weiter aus dem in Abb. 7 dargestellten Beispiel, daß die Vergrößerung des Querschnittes eines Stabes nicht immer eine Erhöhung des Sicherheitsgrades zur Folge haben muß. In unserem Falle erreicht man den größten Sicherheitsgrad dann, wenn man den Stab p überhaupt fortläßt und es ist daher der oftmals geübte Vorgang, ein statisch bestimmtes System durch Einfügen eines weiteren Stabes verstärken zu wollen, nicht immer von Erfolg begleitet.

Der ebene Spannungszustand.

Von *Karl Hager* in München.

Im Jahrgange 1930 dieser Zeitschrift hat Dr. Craemer in einem Aufsatz „Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung“ eine Spannungsfunktion für den ebenen Spannungszustand gewählt und damit die Unzulänglichkeit der Navierschen Biegungstheorie für hohe Tragwände nachgewiesen. Da nun diese Funktion für die Rechnung nicht sehr bequem ist, soll in folgendem der Versuch gemacht werden, eine einfachere Form für die Biegungsspannungen zu finden, welche aber doch die hinreichende Genauigkeit für den praktischen Gebrauch noch gewährleistet.

Wenn ξ und ζ die Verschiebungen eines Punktes (x, z) sind unter der Einwirkung der Spannungen σ_x, σ_z, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau$, so bestehen bekanntlich folgende fünf Gleichungen (Abb. 1).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad & \Bigg| + \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad & \Bigg| - \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

$$\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sigma_x - \frac{\sigma_z}{m}, \qquad \varepsilon \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

$$\tau = \gamma \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Aus (1) kann man, wie angedeutet, τ_{xz} eliminieren.

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{I}).$$

Aus (3) erhält man $\frac{\partial \tau}{\partial z} = \gamma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)$ und aus (2) $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial z}$, so daß sich ergibt

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \gamma \cdot \left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right|, \qquad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \gamma \cdot \left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \, \partial \zeta^2} \right|$$

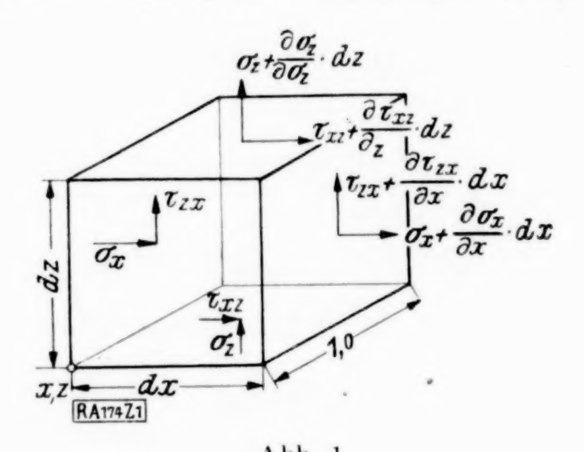


Abb. 1.

Abb. 2.

$$\gamma = \frac{m}{2(m+1)} \cdot \varepsilon; \qquad \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{m}{2(m+1)}$$

aus (2) $\qquad \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \, \partial z^2} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right)$ eingesetzt

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} (2m+1) - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \cdot m + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \cdot m = 0 .$$

Mit Hilfe von (I) erhält man dann die zweite Hauptgleichung

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{II}).$$

Aus (I) und (II) ergeben sich die Differentialgleichungen für die beiden Normalspannungen zu

$$\frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial x^2 \, \partial z^2} + \frac{\partial^4 \sigma_x}{\partial z^4} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{III}).$$

$$\frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial x^2 \, \partial z^2} + \frac{\partial^4 \sigma_z}{\partial x^4} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{IV}).$$

Es sind die Differentialgleichungen der biharmonischen Funktionen, welche auch bei der Berechnung ebener Platten benutzt werden[1]).

Die Gl. (III) wird erfüllt, wenn man setzt

$$\sigma_x = C \cdot \cos \frac{x\pi}{l} \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\pi}{l} \cdot z + Z \cdot \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right),$$

wobei der Koordinatenanfang in die Mitte des unteren Balkenrandes gelegt ist (Abb. 2).

Für freie Auflagerung ist in den Punkten $x = \pm \frac{l}{2}$ $\sigma_x = 0$. Auch diese Bedingung wird von dem angenommenen Ausdruck erfüllt.

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -C \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{x\pi}{l} \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\pi}{l} \cdot z - 2 \cdot Z.$$

Mit Hilfe von (I) führt diese Gleichung also auch zu einem Ausdruck für die lotrechte Spannung σ_z.

Jedoch soll zunächst σ_x weiter betrachtet werden.

Außer der Differentialgleichung (III) muß der Wert σ_x noch zwei weitere Bedingungen erfüllen, welche sich ergeben, wenn man den Balken lotrecht abschneidet und die inneren Kräfte zur Herstellung des Gleichgewichtes wieder ansetzt. Unter der Voraussetzung nur lotrechter Lasten müssen somit die beiden Gleichgewichtsbedingungen an diesem Querschnitt erfüllt sein, welche sich in den Gleichungen ausdrücken

$$\int_0^h \sigma_x \, dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^h \sigma_x \cdot z \cdot dz = \mathfrak{M}_x$$

$$\int_0^h \sigma_x \cdot dz = C \cdot \cos \frac{x\pi}{l} \int_0^h \mathfrak{Cof} \frac{\pi}{l} \cdot z \, dz + Z \cdot \int_0^h \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \cdot dz$$

$$0 = C \cdot \cos \frac{x\pi}{l} \cdot \frac{l}{\pi} \mathfrak{Sin} \frac{\pi}{l} \cdot h + Z \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \cdot h.$$

Wenn die Gleichung für alle Werte x gelten soll, müssen die Faktoren von x Null werden und ebenso das konstante Glied. Für $\cos \frac{x\pi}{l}$ kann man setzen $\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x\pi}{l}\right)^2\right]$.

$$0 = -C \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right) \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\pi}{l} \cdot h - Z \cdot h, \qquad -C \cdot \frac{\pi}{2\,l \cdot h} \mathfrak{Sin} \frac{\pi}{l} \cdot h = Z \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Die Konstante der Gleichung ist

$$C \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\pi}{l} \cdot h + Z \cdot \frac{l^2}{4} \cdot h = 0, \qquad -C \cdot \frac{4}{l \cdot h \cdot \pi} \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\pi}{l} \cdot h = Z \quad . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Man erkennt, daß die beiden Gleichungen nicht übereinstimmen. In Gl. (4) kommt der Faktor $\frac{\pi}{2}$ vor, und diesem entspricht in der Gl. (5) der Faktor $\frac{4}{\pi}$. Es wird später auf diese Unstimmigkeit zurückzukommen sein. Vorerst soll die zweite Gleichgewichtsbedingung, die Momentengleichung, behandelt werden.

$$\int_0^h \sigma_x \cdot z \, dz = \mathfrak{M}_x = C \cdot \cos \frac{x\pi}{l} \int_0^h z \, \mathfrak{Cof} \frac{\pi z}{l} \, dz + Z \cdot \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \int_0^h z \, dz$$

$$\int_0^h z \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\pi}{l} \cdot z \, dz = \int_0^h z \cdot \cos i \frac{\pi}{l} \, z \cdot dz$$

$$\int_0^h z \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\pi}{l} \cdot z \, dz = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \left|1 + h \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \mathfrak{Sin} \frac{h\pi}{l} - \mathfrak{Cof} \frac{h\pi}{l}\right| = H$$

$$\mathfrak{M}_x = C \cdot \cos \frac{x\pi}{l} \cdot H + Z \cdot \frac{h^2}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right).$$

[1]) Vgl. Dr. Hencky, „Über den Spannungszustand in rechteckigen, ebenen Platten". München 1913.

Auch in dieser Gleichung müssen die Faktoren von x^2 und die Konstante Null werden, wenn sie für alle Werte von x Geltung haben soll. Es ist daher nötig, für die weitere praktische Rechnung einen Belastungsfall anzunehmen, der aber mit Rücksicht auf den gewählten Spannungsausdruck zur Balkenmitte symmetrisch sein soll. Wir wählen die gleichförmig verteilte Belastung p auf die Längeneinheit, und die Balkenbreite soll eins sein.

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right); \quad \cos\frac{x\pi}{l} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x\pi}{l}\right)^2$$

$$0 = -\frac{p l^2}{8} + \frac{p x^2}{2} - C \cdot H \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{2} - Z \cdot \frac{h^2}{2} \cdot x^2 + C \cdot H + Z \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{l^2}{4}.$$

Der Faktor von x^2 ist

$$\frac{p}{2} - C \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{H}{2} - Z \cdot \frac{h^2}{2} = 0, \qquad Z = \frac{p}{h^2} - C \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{H}{h^2} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Die Konstante der Gleichung ist

$$0 = -\frac{p l^2}{8} + C \cdot H + Z \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{l^2}{4}, \qquad Z = \frac{p}{h^2} - C \cdot \frac{H \cdot 8}{l^2 h^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Auch die Gl. (6) und (7) zeigen eine Unstimmigkeit. Dem Faktor $\pi^2 = 9{,}869$ in (6) entspricht der Faktor 8 in (7). Diese Unstimmigkeiten in den Gl. (4), (5) bzw. (6), (7) ließen sich vermeiden, wenn man den Ausdruck für σ_x durch eine Reihe ausdrücken würde, aber diese Umständlichkeit soll ja vermieden werden. Man hat daher zunächst nach dem Zweck der Rechnung die Konstanten zu wählen. Im Koordinatenanfangspunkt werden die Glieder mit x^2 an sich Null. Man wird also bei Rechnungen mit den Maximalmomenten symmetrischer Belastungen die Gl. (5) und (7) für die Berechnung der Konstanten C und Z benutzen, während man für andere Punkte des Balkens in den Gleichungen am besten einen Korrektionsfaktor anbringen muß. Wobei übrigens bemerkt sei, daß für die meisten Aufgaben die Unterschiede der 4 Gleichungen von C und Z praktisch fast bedeutungslos sind.

Wir haben für $\cos\frac{x\pi}{l}$ die beiden ersten Glieder seiner Reihe gesetzt. Man kann nun in dieser Annäherung den Korrektionsfaktor anbringen.

$$\cos\frac{x\pi}{l} = \left(1 - \frac{1}{2\psi} \cdot \left(\frac{x\pi}{l}\right)^2\right).$$

Will man die Unstimmigkeiten ganz beseitigen, so würde in den Gl. (4) und (5) $\psi = 1{,}27$ und in den Gl. (6) und (7) $\psi = 1{,}23$ sein müssen. Um nun nicht zu weit von dem Wert $\cos\frac{x\pi}{l}$ abzuweichen, wird man ψ 1,1 bis 1,2 zu wählen haben, wenn die Rechnung Punkte in der Nähe der Auflager betrifft.

Wir haben oben bereits gesehen, daß mit Hilfe der Gl. (1) auch ein Ausdruck für σ_z gefunden werden kann.

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -C\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos\frac{x\pi}{l} \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l} \cdot z - 2 \cdot Z$$

$$\sigma_z = -C \cdot \cos\frac{x\pi}{l} \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l} \cdot z - Z \cdot z^2 + C_1 \cdot z + C_2.$$

Wenn der untere Balkenrand ($z = 0$) unbelastet ist, muß dort $\sigma_z = 0$ werden, d. h.

$$-C \cdot \cos\frac{x\pi}{l} + C_2 = 0; \quad C_2 = C \cdot \cos\frac{x\pi}{l}.$$

Für $z = h$, oberer Balkenrand, welcher die Belastung p trägt, ist $\sigma_z = p$

$$p = -C \cdot \cos\frac{x\pi}{l} \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l} \cdot h - Z \cdot h^2 + C_1 \cdot h + C_2$$

$$C_1 = \frac{p}{h} + \frac{C}{h} \cdot \cos\frac{x\pi}{l}\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l} \cdot h - 1\right) + Z \cdot h$$

$$\sigma_z = C \cdot \cos\frac{x\pi}{l}\left(1 - \mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l}\,z + \frac{z}{h} \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l}\,h - \frac{z}{h}\right) + \frac{p \cdot z}{h} + Z \cdot h \cdot z - Z \cdot z^2.$$

Zur Berechnung der Schubspannung τ muß man auf die Gl. (1) zurückgreifen.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau}{\partial z}; \quad \sigma_x = C \cdot \cos\frac{\pi x}{l}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l}z + Z\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -C\frac{\pi}{l}\cdot\sin\frac{x\pi}{l}\cdot\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l}\cdot z - Z\cdot 2x = -\frac{\partial \tau}{\partial z}$$

$$\tau = C\cdot\sin\frac{x\pi}{l}\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot z + Z\cdot 2x\cdot z + T.$$

Da für $z=0$ auch $\tau=0$ wird, ist die Konstante $T=0$.

Bei symmetrischer Belastung ist auch für $x=0$ $\tau=0$. Auch diese Bedingung erfüllt die Gleichung für τ.

Es sind nunmehr noch die Konstanten C und Z aus den oben entwickelten Gl. (4), (5) (6) und (7) zu berechnen. Zunächst sollen Punkte des Trägers behandelt werden, welche in der Nähe des Koordinatenanfangs liegen, so daß in den Spannungsgleichungen die Glieder mit x^2 an sich Null werden und nur noch die Konstanten Null werden müssen. Es sind daher die beiden Gl. (5) und (7) zu benutzen.

$$Z + C\cdot\frac{4}{l\cdot h\cdot\pi}\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h = 0, \qquad Z + C\cdot\frac{8\cdot H}{l^2 h^2} = \frac{p}{h^2}.$$

Sie ergeben:

$$C = \frac{p\,l^2\cdot\pi}{8\pi\cdot H - 4\,l\,h\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}; \quad Z = -\frac{p\,\frac{l}{h}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}{2\pi\cdot H - l\,h\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}.$$

Werden andere Punkte des Balkens betrachtet, so benützt man, wie oben bereits gezeigt, die Gl. (4) und (6) unter Verwendung eines Korrektionsfaktors ψ. Sie lauten dann:

$$Z + C\cdot\frac{H\cdot\pi^2}{\psi\cdot l^2 h^2} = \frac{p}{h^2} \quad \text{(6a)}.$$

$$Z + C\cdot\frac{\pi\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}{\psi\cdot 2\,l\,h} = 0 \quad \text{(7a)}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden Konstanten zu

$$C = \frac{2\cdot\psi\cdot p\,l^2}{2\cdot\pi^2\cdot H - \pi\cdot l\,h\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}; \quad Z = -\frac{p\,\frac{l}{h}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}{2\pi\cdot H - l\,h\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot h}.$$

Man erkennt, daß die Werte der Konstanten Z in beiden Fällen gleich sind.

Man kann auch für das Verhältnis der Balkenhöhe h zur Stützweite $\frac{h}{l} = a$ in die Gleichungen einführen und erhält dann folgende Ausdrücke:

Für Punkte in der Nähe des Koordinatenanfangs

$$C = \frac{p\cdot\pi^2}{8 + 4\,a\pi\,\mathfrak{Sin}\,a\pi - 8\,\mathfrak{Cof}\,a\pi}; \quad Z = -\frac{p\cdot\pi\cdot\mathfrak{Sin}\,a\pi}{a\,l^2\,(2 + a\pi\,\mathfrak{Sin}\,a\pi - 2\,\mathfrak{Cof}\,a\pi)}.$$

und für andere Punkte die mit dem Korrektionsfaktor versehenen Werte

$$C = \frac{2\cdot p\cdot\psi}{2 + \pi a\,\mathfrak{Sin}\,\pi a - 2\,\mathfrak{Cof}\,a\pi}; \quad Z = -\frac{p\pi\cdot\mathfrak{Sin}\,a\pi}{a\,l^2\,(2 + a\pi\,\mathfrak{Sin}\,a\pi - 2\,\mathfrak{Cof}\,a\pi)}.$$

Zur Berechnung der Schubspannungen muß man zu den Gl. (1) zurückkehren.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau}{\partial z} = -C\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{l}\cdot z - Z\,2x.$$

$$\tau = C\cdot\sin\frac{x\pi}{l}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{l}\cdot z + Z\,2\,x\cdot z + T \quad \text{(8)}.$$

Für $z=0$ muß $\tau=0$ werden, so daß auch $T=0$ zu setzen ist. Bei symmetrischer Belastung zur Balkenmitte wird $\tau=0$ für $a=0$. Auch diese Bedingung wird von der Gl. (8) erfüllt. Dagegen wird die Bedingung nicht erfüllt, daß τ auch für den oberen, belasteten Balkenrand Null wird. Vielleicht ließe sich das in einem komplizierteren Ausdruck erreichen. Aber auch in der eingangs erwähnten Arbeit, welche als Spannungsfunktion einen sehr komplizierten Ausdruck in Gestalt einer unendlichen Reihe benützt, ist die Bedingung nicht erfüllt.

Zum Schlusse seien die praktischen Ergebnisse der vorstehenden Entwicklungen noch an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

Zahlenbeispiel:

$l=h=3{,}00$ m; $a=1{,}0$; $p=100$ t/m² $=10$ kg/cm².

Die Last soll oben liegen (Abb. 3).

Abb. 3.

Nach (5) und (7)

$C=16{,}3$; $Z=-26{,}2$

$x=0 \quad z=0$; $\sigma_x=-43{,}8$; $z=h \quad \sigma_x=+126{,}9$ Navier $\sigma_x=\pm 75{,}0$; $\frac{75}{126{,}9}=0{,}59$

$z=\frac{h}{2} \quad \sigma_z=51{,}50$ Navier $50{,}0 \quad \frac{50}{51{,}5}=0{,}97$

Nach (6a) und (7a)

$C=15{,}7$; $Z=-26{,}2$

$x=0{,}2\,l$; $z=0 \quad \sigma_x=-36{,}8$; $z=h \quad \sigma_x=+95{,}7$ Navier 63; $\frac{63}{95{,}7}=0{,}66$

$x=0{,}2\,l$; $z=\frac{h}{2} \quad \sigma_z=38{,}9$; $z=\frac{3}{4}h \quad \sigma_z=66{,}8$

$x=0{,}4\,l$; $z=0$, $\sigma_x=-16{,}35$; $x=h$; $\sigma_x=+33{,}8$ · Navier 27; $\frac{27}{33{,}8}=0{,}80$

$x=0{,}4\,l$; $z=\frac{h}{2} \quad \sigma_z=9{,}30$; $z=\frac{3}{4}h \quad \sigma_z=43{,}9$

$x=0{,}5\,l$; $z=0$ und $z=h \quad \sigma_x=0$ Navier 0

$z=\frac{h}{2} \quad \tau=81{,}2$ Navier 75.

Dasselbe Beispiel mit abnehmendem Höhenverhältnis a

$h=1{,}0 \quad a=\frac{1}{3} \quad C=2180$; $Z=-1190$

$x=0 \quad z=0 \quad \sigma_x=-500$; $z=h \quad \sigma_x=+810$ Navier 672; $\frac{672}{810}=0{,}83$

$h=0{,}30 \quad a=\frac{1}{10} \quad C=253\,720$; $Z=-114\,635$

$x=0 \quad z=0 \quad \sigma_x=-4210 \quad z=h \quad \sigma_x=8375$ Navier 7460; $\frac{7460}{8375}=0{,}89$.

Man erkennt, daß mit abnehmendem Höhenverhältnis die Randspannungen sich dem Navierschen Werte nähern.

In der Abb. 3 sind die wichtigsten Rechnungsergebnisse für eine quadratische, gleichförmig belastete Wand als Träger auf zwei Stützen zusammengestellt.

Würde die Last an dem unteren Balkenrande angreifen, so wäre nur der Koordinatenanfang in die obere Balkenkante zu legen.

Zusammenfassung. Ausgehend von den fünf Differentialgleichungen, welche für den zweiachsigen Spannungszustand zwischen den Spannungen und Verformungen in jedem Körperpunkte bestehen, werden für die Spannungen σ_x, σ_z und τ Gleichungen entwickelt, welche die Differentialgleichungen und die Randbedingungen erfüllen. 174

Zur Statik eingespannter Rechteckplatten.

Von *Harry Schmidt* in Köthen.

Unter Benutzung eines früher[1]) angegebenen Integrationsverfahrens habe ich kürzlich[2]) die Durchbiegung einer frei aufliegenden Rechteckplatte bei statischer, gleichförmiger Belastung eines parallel zu den Plattenrändern abgegrenzten Plattenteils berechnet, womit die Mehrzahl der praktisch wichtigen Lastverteilungen durch geeignete Spezialisierungen erfaßt werden kann. In der vorliegenden Mitteilung soll gezeigt werden, daß sich der gleiche Belastungszustand auf genau entsprechende Weise zunächst für die zweiseitig eingespannte, zweiseitig frei aufliegende Rechteckplatte behandeln und alsdann der Fall der vierseitig eingespannten Platte sich auf das Problem der Auflösung von zwei Systemen je einfach unendlich vieler Gleichungen mit einfach unendlich vielen Unbekannten reduzieren läßt.

1. Bezeichnungen und Ansatz. Die Plattenmittelfläche möge das durch $0 \leqq x \leqq a$ und $0 \leqq y \leqq b$ gekennzeichnete Gebiet B der XY-Ebene bedecken; für $x = 0$ bzw. a sei feste Einspannung, für $y = 0$ bzw. b hingegen freie Auflagerung angenommen, und die zu betrachtende, auf die Flächeneinheit bezogene Lastverteilung $p(x, y)$ werde mit festem p_0 durch den Ansatz

$$p(x, y) = \begin{Bmatrix} p_0 \text{ in } B_0, \\ 0 \text{ in } B - B_0 \end{Bmatrix} \qquad (1{,}1)$$

beschrieben, wobei B_0 das aus Abb. 1 ersichtliche rechteckig berandete Teilgebiet von B bedeutet. Setzen wir sodann

$$N = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)}, \qquad (1{,}11)$$

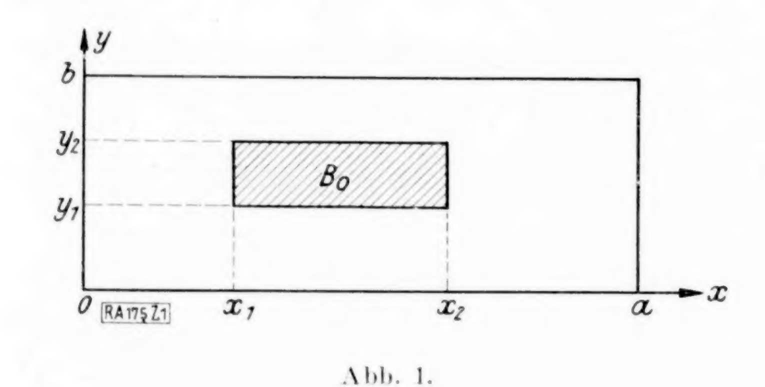


Abb. 1.

unter h die Plattendicke sowie unter E bzw. m den Youngschen Elastizitätsmodul bzw. die Poissonsche Querkontraktionszahl des Plattenmaterials verstanden, so ist die Durchbiegung $w(x, y)$ als dasjenige Integral der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{N} \cdot p(x, y) \qquad (1{,}2)$$

zu ermitteln, das den acht Randbedingungen

$$[w(x, y)]_{x=0} = [w(x, y)]_{x=a} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=a} = 0 \qquad (1{,}21)$$

und

$$[w(x, y)]_{y=0} = [w(x, y)]_{y=b} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=b} = 0 \qquad (1{,}22)$$

genügt. Durch Heranziehung der bekannten, für jedes positive a_0 gültigen Relation

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} \frac{e^{tz}}{z}\, dz = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für } t > 0, \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{Bmatrix} \qquad (1{,}3)$$

läßt sich aber (1,1) durch

[1]) H. Schmidt, Zs. f. ang. Math. u. Mech. **9**, 491, 1929.

[2]) H. Schmidt, Zs. f. Phys. **68**, 423, 1931. Vgl. überdies die inzwischen erschienenen Arbeiten: Ingenieur-Archiv **2**, 449, 1931; Zs. f. ang. Math. u. Mech. **11**, 426, 1931; Zs. f. Phys. **74**, 139, 1932.

$$p(x,y) = \frac{p_1(x)}{2\pi i}\cdot\left\{\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{(y-y_1)\zeta}}{\zeta}\,d\zeta - \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{(y-y_2)\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\right\} \qquad (1,4)$$

mit

$$p_1(x) = \frac{p_0}{2\pi i}\cdot\left\{\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{(x-x_1)z}}{z}\,dz - \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{(x-x_2)z}}{z}\,dz\right\} \qquad (1,41)$$

ersetzen, so daß wir unter Berufung auf das lineare Superpositionsprinzip für die gesuchte Durchbiegung $w(x,y)$ zunächst den Ausdruck

$$w(x,y) = \frac{p_0}{N}\cdot W(x,y) \qquad (1,5)$$

mit

$$W(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-x_1 z}-e^{-x_2 z}}{z}\cdot\left\{J_1(x,y;z) - J_2(x,y;z)\right\}dz \qquad (1,51)$$

erhalten, falls

$$J_\varkappa(x,y;z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-y_\varkappa \zeta}}{\zeta}\cdot u(x,y;z,\zeta)\,d\zeta \qquad (\varkappa = 1,2) \qquad (1,52)$$

gesetzt und mit $u(x,y;z,\zeta)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u(x,y;z,\zeta) = e^{xz+y\zeta} \qquad (1,6)$$

bezeichnet wird, die den (1,21) und (1,22) entsprechenden Randbedingungen

$$[u(x,y;z,\zeta)]_{x=0} = [u(x,y;z,\zeta)]_{x=a} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=a} = 0 \qquad (1,61)$$

und

$$[u(x,y;z,\zeta)]_{y=0} = [u(x,y;z,\zeta)]_{y=b} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{y=b} = 0 \qquad (1,62)$$

genügt.

2. Lösung des Randwertproblems. Um nun das Randwertproblem (1,6) mit (1,61) und (1,62) zu lösen, gehen wir von dem partikulären Integral

$$u_1(x,y;z,\zeta) = \frac{e^{xz+y\zeta}}{(z^2+\zeta^2)^2} \qquad (2,1)$$

der inhomogenen Gleichung (1,6) aus und bestimmen eine der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta u_0(x,y;z,\zeta) = 0 \qquad (2,11)$$

genügende Funktion von der Form

$$u_0^{(1)}(x,y;z,\zeta) = \frac{e^{xz}}{(z^2+\zeta^2)^2}\cdot f(y;z,\zeta), \qquad (2,2)$$

was

$$\left.\begin{aligned} f(y;z,\zeta) = A(z,\zeta)\cdot\sin(yz) + B(z,\zeta)\cdot\cos(yz) \\ + C(z,\zeta)\cdot y\cdot\sin(yz) + D(z,\zeta)\cdot y\cdot\cos(yz)\end{aligned}\right\} \qquad (2,21)$$

liefert. Die hierin auftretenden Koeffizienten wählen wir derart, daß die Summe

$$u_1(x,y;z,\zeta) + u_0^{(1)}(x,y;z,\zeta) = \frac{e^{xz}}{(z^2+\zeta^2)^2}\cdot\{e^{y\zeta} + f(y;z,\zeta)\}$$

die Randbedingungen (1,62) erfüllt, wodurch sich

$$\left.\begin{aligned} A(z,\zeta) &= \frac{2z\cdot\sin(bz)\cdot\cos(bz)+b\cdot(z^2+\zeta^2)-e^{b\zeta}\cdot\{2z\cdot\sin(bz)+b\cdot(z^2+\zeta^2)\cdot\cos(bz)\}}{2z\cdot\sin^2(bz)}, \\ B(z,\zeta) &= -1, \qquad C(z,\zeta) = -\frac{z^2+\zeta^2}{2z}, \\ D(z,\zeta) &= \frac{e^{b\zeta}\cdot(z^2+\zeta^2)-(z^2+\zeta^2)\cdot\cos(bz)}{2z\cdot\sin(bz)} \end{aligned}\right\} \quad (2{,}22)$$

ergibt. Setzen wir nun die Sinusreihe

$$u_1(x,y;z,\zeta)+u_0^{(1)}(x,y;z,\zeta)=e^{xz}\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}K_\nu(z,\zeta)\cdot\sin(\beta_\nu y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}3)$$

mit

$$\beta_\nu=\frac{\nu\pi}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}31)$$

an, so wird

$$K_\nu(z,\zeta)=\frac{2}{b}\cdot\int_0^b\{u_1(x,\eta;z,\zeta)+u_0^{(1)}(x,\eta;z,\zeta)\}\cdot\sin(\beta_\nu\eta)\,d\eta$$

oder

$$K_\nu(z,\zeta)=\frac{2\beta_\nu}{b}\cdot\frac{1-(-1)^\nu\cdot e^{b\zeta}}{(z-\beta_\nu)^2\cdot(z+\beta_\nu)^2\cdot(\zeta^2+\beta_\nu^2)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}32)$$

und da die Funktion

$$u_0^{(2)}(x,y;z,\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}K_\nu(z,\zeta)\cdot\varphi_\nu(x;z)\cdot\sin(\beta_\nu y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}4)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\nu(x;z) &= c_\nu^{(1)}(z)\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(x-a)]+c_\nu^{(2)}(z)\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu x) \\ &\quad + c_\nu^{(3)}(z)\cdot x\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(x-a)]+c_\nu^{(4)}(z)\cdot(x-a)\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu x) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2{,}41)$$

der homogenen Gl. (2,11) sowie den Randbedingungen (1,62) genügt, so muß der Ansatz

$$u(x,y;z,\zeta)=u_1(x,y;z,\zeta)+u_0^{(1)}(x,y;z,\zeta)+u_0^{(2)}(x,y;z,\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}5)$$

oder

$$u(x,y;z,\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}K_\nu(z,\zeta)\cdot\{e^{xz}+\varphi_\nu(x;z)\}\cdot\sin(\beta_\nu y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2{,}51)$$

das sämtlichen verlangten Nebenbedingungen entsprechende Integral von (1,6) darstellen, falls die Koeffizienten von (2,41) so bestimmt werden, daß

$$[e^{xz}+\varphi_\nu(x;z)]_{x=0,a}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\{e^{xz}+\varphi_\nu(x,z)\}\right]_{x=0,a}=0$$

gilt. Dies führt aber zu den Gleichungen

$$\begin{gathered} 1-\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\cdot c_\nu^{(1)}(z)=0, \\ e^{az}+\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\cdot c_\nu^{(2)}(z)=0, \\ z+\beta_\nu\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)\cdot c_\nu^{(1)}(z)+\beta_\nu\cdot c_\nu^{(2)}(z)-\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\cdot c_\nu^{(3)}(z)-\beta_\nu a\cdot c_\nu^{(4)}(z)=0, \\ z\cdot e^{az}+\beta_\nu\cdot c_\nu^{(1)}(z)+\beta_\nu\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)\cdot c_\nu^{(2)}(z)+\beta_\nu a\cdot c_\nu^{(3)}(z)+\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\cdot c_\nu^{(4)}(z)=0, \end{gathered}$$

die durch

$$\left.\begin{aligned} c_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)}, \qquad c_\nu^{(2)}(z)=-\frac{e^{az}}{\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)}, \\ c_\nu^{(3)}(z) &= \frac{\begin{array}{l} e^{az}\cdot\{\beta_\nu a z\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)-\beta_\nu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)-\beta_\nu^2 a\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)\} \\ \qquad +\beta_\nu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)+z\cdot\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a)+\beta_\nu^2 a \end{array}}{\{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a)-\beta_\nu^2 a^2\}\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)}, \\ c_\nu^{(4)}(z) &= \frac{\begin{array}{l} e^{az}\cdot\{\beta_\nu^2 a+\beta_\nu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)-z\cdot\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a)\} \\ \qquad -\beta_\nu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)-\beta_\nu^2 a\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)-\beta_\nu a z\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a) \end{array}}{\{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a)-\beta_\nu^2 a^2\}\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2{,}6)$$

gelöst werden.

3. Auswertung der komplexen Integrale. Zur Auswertung der Integrale (1,52) und (1,51) benutzen wir eine früher[3]) bewiesene Verallgemeinerung von (1,3), die durch

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{tz}}{F(z)}\,dz=\begin{cases}\sum_{\sigma}\sum_{\lambda=1}^{s_\sigma}e^{t z_\sigma}\cdot A_\lambda^{(\sigma)}\cdot\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\ \text{für } t>0,\\ 0\ \text{für } t<0\end{cases}\quad\ldots\ldots\ldots\ (3{,}1)$$

mit

$$\frac{1}{F(z)}=\sum_{\lambda=1}^{s_\sigma}\frac{A_\lambda^{(\sigma)}}{(z-z_\sigma)^\lambda}+\sum_{\varkappa=0}^{\infty}B_\varkappa^{(\sigma)}\cdot(z-z_\sigma)^\varkappa\quad(\sigma=1,2,\ldots\ldots)\quad\ldots\ (3{,}11)$$

zum Ausdruck gelangt, wobei $\left|\frac{z}{F(z)}\right|$ für $z\to\infty$ als beschränkt vorauszusetzen ist, und wobei sämtliche (isoliert liegenden) Nullstellen $z=z_\sigma$ der analytischen Funktion $F(z)$ Realteile kleiner als $a_0>0$ besitzen sollen. Wegen der in Analogie zu (3,11) bestehenden Entwicklungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta\cdot(z^2+\zeta^2)^2}&=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{\zeta}+\ldots\ldots\\&=-\frac{1}{4iz^3}\cdot\frac{1}{(\zeta-iz)^2}-\frac{1}{2z^4}\cdot\frac{1}{\zeta-iz}+\ldots\ldots\\&=\frac{1}{4iz^3}\cdot\frac{1}{(\zeta+iz)^2}-\frac{1}{2z^4}\cdot\frac{1}{\zeta+iz}+\ldots\ldots\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta\cdot(z^2+\zeta^2)}&=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\zeta}+\ldots\ldots\\&=-\frac{1}{2z^2}\cdot\frac{1}{\zeta-iz}+\ldots\ldots\\&=-\frac{1}{2z^2}\cdot\frac{1}{\zeta+iz}+\ldots\ldots\end{aligned}$$

erhalten wir hiernach gemäß (2,1)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-y_\varkappa\zeta}}{\zeta}\cdot u_1(x,y;z,\zeta)\,d\zeta=\begin{cases}e^{xz}\cdot h_\varkappa(y;z)\ \text{für } y\geq y_\varkappa,\\ 0\ \text{für } y\leq y_\varkappa\end{cases}\quad\ldots\ldots\ (3{,}2)$$

mit

$$h_\varkappa(y;z)=\frac{1}{z^4}-\frac{y-y_\varkappa}{2z^3}\cdot\sin[(y-y_\varkappa)z]-\frac{1}{z^4}\cdot\cos[(y-y_\varkappa)z],\quad\ldots\ldots\ (3{,}21)$$

während sich gemäß (2,2) nach Einführung von (2,21) und (2,22)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-y_\varkappa\zeta}}{\zeta}\cdot u_0^{(1)}(x,y;z,\zeta)\,d\zeta=e^{xz}\cdot g_\varkappa(y;z)\quad\ldots\ldots\ (3{,}3)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}g_\varkappa(y;z)&=\frac{\sin(yz)}{\sin(bz)}\cdot\left\{\frac{1}{z^4}-\frac{b-y_\varkappa}{2z^3}\cdot\sin[(b-y_\varkappa)z]-\frac{1}{z^4}\cdot\cos[(b-y_\varkappa)z]\right\}\\&-\frac{b\cdot\cos(bz)\cdot\sin(yz)-y\cdot\sin(bz)\cdot\cos(yz)}{2z\cdot\sin^2(bz)}\cdot\left\{\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}\cdot\cos[(b-y_\varkappa)z]\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (3{,}31)$$

[3]) H. Schmidt, Zs. f. Phys. 39, 474, 1926

sowie gemäß (2,4) und (2,32)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\alpha_0-i\infty}^{\alpha_0+i\infty}\frac{e^{-y_\varkappa\zeta}}{\zeta}\cdot u_0^{(2)}(x,y;z,\zeta)\,d\zeta=F_\varkappa(x,y;z) \qquad (3,4)$$

mit

$$F_\varkappa(x,y;z)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\beta_\nu b}\cdot\frac{(-1)^\nu\cdot\sin(\beta_\nu y)\cdot\varphi_\nu(x;z)}{(z-\beta_\nu)^2\cdot(z+\beta_\nu)^2}\cdot\{1-(-1)^\nu\cdot\cos(\beta_\nu y_\varkappa)\} \qquad (3,41)$$

berechnet. Durch Eintragung von (3,2), (3,3) und (3,4) in (2,5) ergibt sich sodann auf Grund von (1,52)

$$J_1(x,y;z)-J_2(x,y;z)=e^{xz}\cdot G(y;z)+F_0(x,y;z) \qquad (3,5)$$

mit

$$F_0(x,y;z)=F_1(x,y;z)-F_2(x,y;z)$$

oder wegen (3,41)

$$F_0(x,y;z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\beta_\nu b}\cdot\frac{\sin(\beta_\nu y)\cdot\varphi_\nu(x;z)}{(z-\beta_\nu)^2\cdot(z+\beta_\nu)^2}\cdot\{\cos(\beta_\nu y_1)-\cos(\beta_\nu y_2)\} \qquad (3,51)$$

sowie mit

$$G(y;z)=\begin{cases}G_1(y;z) \text{ für } 0\leq y\leq y_1,\\ G_2(y;z) \text{ für } y_1\leq y\leq y_2,\\ G_3(y;z) \text{ für } y_2\leq y\leq b,\end{cases} \qquad (3,52)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}G_1(y;z)&=g_1(y;z)-g_2(y;z),\\ G_2(y;z)&=g_1(y;z)+h_1(y;z)-g_2(y;z),\\ G_3(y;z)&=g_1(y;z)+h_1(y;z)-g_2(y;z)-h_2(y;z)\end{aligned}\right\} \qquad (3,53)$$

zu setzen ist.

4. Formulierung des Endresultats. Da gemäß (3,21) und (3,31)

$$g_\varkappa(y;z)+h_\varkappa(y;z)=\frac{\sin(bz)-\sin(yz)-\cos(y_\varkappa z)\cdot\sin[(b-y)z]}{z^4\cdot\sin(bz)}$$
$$-\frac{y\cdot\{\cos(y_\varkappa z)\cdot\cos[(b-y)z]-\cos(yz)\}+y_\varkappa\cdot\sin(y_\varkappa z)\cdot\sin[(b-y)z]}{2z^3\cdot\sin(bz)}$$
$$+\frac{b\cdot\{\cos(y_\varkappa z)-\cos(bz)\}\cdot\sin(yz)}{2z^3\cdot\sin^2(bz)}$$

gilt, so sind nach Eintragung von (3,5) in (1,51) die Voraussetzungen zu erneuter Anwendung von (3,1) sämtlich erfüllt. Zunächst ergibt sich wegen (3,52), (3,53), (3,21) und (3,31)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{(x-x_\lambda)z}}{z}\cdot G(y;z)\,dz=\begin{cases}W_1^{(\lambda)}(x,y)+W_2(y) \text{ für } x\geq x_\lambda,\\ 0 \text{ für } x\leq x_\lambda,\end{cases} \qquad (4,1)$$

falls

$$W_1^{(\lambda)}(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\{\cos(\beta_\nu y_1)-\cos(\beta_\nu y_2)\}\cdot\chi_\nu^{(\lambda)}(x)\cdot\sin(\beta_\nu y) \qquad (4,2)$$

mit

$$\chi_\nu^{(\lambda)}(x)=-\frac{2}{\beta_\nu^5 b}\cdot\mathfrak{Cof}[\beta_\nu(x-x_\lambda)]+\frac{x-x_\lambda}{\beta_\nu^4 b}\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(x-x_\lambda)] \qquad (4,21)$$

sowie

$$W_2(y)=\begin{cases}W_2^{(1)}(y) \text{ für } 0\leq y\leq y_1,\\ W_2^{(2)}(y) \text{ für } y_1\leq y\leq y_2,\\ W_2^{(3)}(y) \text{ für } y_2\leq y\leq b\end{cases} \qquad (4,3)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}W_2^{(1)}(y)&=\frac{y}{24b}\cdot\{2(b^2-y^2)\cdot[(b-y_1)^2-(b-y_2)^2]-(b-y_1)^4+(b-y_2)^4\},\\ W_2^{(2)}(y)&=W_2^{(1)}(y)+\frac{1}{24}\cdot(y-y_1)^4,\\ W_2^{(3)}(y)&=W_2^{(1)}(y)+\frac{1}{24}\cdot\{(y-y_1)^4-(y-y_2)^4\}\end{aligned}\right\} \qquad (4,31)$$

gesetzt wird. Benutzt man an Stelle der geschlossenen Ausdrücke (2,1) und (2,2) die Reihendarstellung (2,3), so wird man durch Eintragung von (2,5) in (1,52) und Anwendung auf (1,51) zu dem Ausdruck

$$W_2(y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\beta_\nu^5\,b}\cdot\{\cos(\beta_\nu y_1)-\cos(\beta_\nu y_2)\}\cdot\sin(\beta_\nu y)\quad\ldots\ldots\quad(4{,}32)$$

geführt, der nichts anderes als die Fourierentwicklung von (4,3) darstellt, und der unmittelbar die Berechtigung der in (4,1) hinzugefügten Gleichheitszeichen erkennen läßt. Ferner wird gemäß (3,51), (2,41) und (2,6)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-x_1 z}-e^{-x_2 z}}{z}\cdot F_0(x,y;z)\,dz=W_0(x,y),\quad\ldots\ldots\quad(4{,}4)$$

wobei

$$W_0(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\beta_\nu b}\cdot\{\cos(\beta_\nu y_1)-\cos(\beta_\nu y_2)\}\cdot\frac{q_\nu^{(1)}\cdot\psi_\nu^{(1)}(x)+q_\nu^{(2)}\cdot\psi_\nu^{(2)}(x)}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a)-\beta_\nu^2 a^2}\cdot\sin(\beta_\nu y)\quad(4{,}5)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\psi_\nu^{(1)}(x)=\{\beta_\nu x\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu x)-\mathfrak{Sin}(\beta_\nu x)\}\cdot\{\beta_\nu a\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a)+\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\}\\-\beta_\nu^2 a x\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu x)\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\end{aligned}\right\}\quad(4{,}51)$$

und

$$\left.\begin{aligned}q_\nu^{(1)}=&\frac{1}{2\beta_\nu^3}\cdot\{(a-x_1)\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(a-x_1)]-(a-x_2)\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(a-x_2)]\}\\&-\frac{1}{\beta_\nu^4}\cdot\{\mathfrak{Cof}[\beta_\nu(a-x_1)]-\mathfrak{Cof}[\beta_\nu(a-x_2)]\}\end{aligned}\right\}\quad(4{,}52)$$

sowie mit

$$\psi_\nu^{(2)}(x)=x\,a\,\beta_\nu\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(x-a)]-(x-a)\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu x)\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\quad\ldots\quad(4{,}53)$$

und

$$\left.\begin{aligned}q_\nu^{(2)}=&\frac{1}{2\beta_\nu^2}\cdot\{(a-x_1)\cdot\mathfrak{Cof}[\beta_\nu(a-x_1)]-(a-x_2)\cdot\mathfrak{Cof}[\beta_\nu(a-x_1)]\}\\&-\frac{1}{2\beta_\nu^3}\cdot\{\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(a-x_1)]-\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(a-x_2)]\}\end{aligned}\right\}\quad(4{,}54)$$

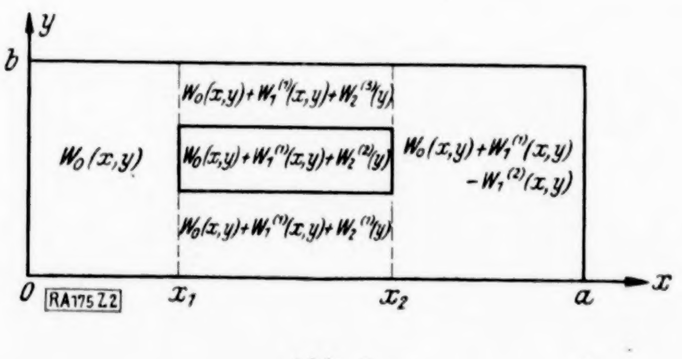


Abb. 2.

gilt. Die Einführung von (3,5) in (1,51) liefert demnach gemäß (4,1) und (4,4) das in Abb. 2 veranschaulichte Endergebnis

$$W(x,y)=\left\{\begin{aligned}&W_0(x,y)\ \text{für}\ 0\leq x\leq x_1,\\&W_0(x,y)+W_1^{(1)}(x,y)+W_2(y)\quad\text{für}\ x_1\leq x\leq x_2,\\&W_0(x,y)+W_1^{(1)}(x,y)-W_1^{(2)}(x,y)\ \text{für}\ x_2\leq x\leq a,\end{aligned}\right\}\quad(4{,}6)$$

das sich auch in Form der Doppelsinusreihe

$$W(x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}L_{\mu\nu}\cdot\sin(\alpha_\mu x)\cdot\sin(\beta_\nu y)\quad\ldots\ldots\quad(4{,}7)$$

mit

$$\alpha_\mu=\frac{\mu\pi}{a}\quad\ldots\ldots\quad(4{,}71)$$

und

$$L_{\mu\nu} = \frac{4}{a\,b}\int_0^a \sin(\alpha_\mu \xi)\,d\xi \int_0^b W(\xi,\eta)\cdot\sin(\beta_\nu \eta)\,d\eta \quad \text{. . . . .} \quad (4{,}72)$$

schreiben läßt. Diese Koeffizienten $L_{\mu\nu}$ berechnen sich am einfachsten dadurch, daß man (2,51) nach Vornahme der Fourierentwicklung der Funktion $e^{\varkappa z} + \varphi_\nu(x;z)$ in (1,52) einträgt und die hiermit gebildete Relation (1,51) gemäß (3,1) auswertet; auf diese Weise ergibt sich die auch direkt zu bestätigende Beziehung

$$L_{\mu\nu} = \frac{4\cdot\{\cos(\beta_\nu y_1) - \cos(\beta_\nu y_2)\}\cdot\{l_{\mu\nu}^{(1)} - l_{\mu\nu}^{(2)}\}}{a\,b\,\alpha_\mu \beta_\nu^3\cdot(\alpha_\mu^2 + \beta_\nu^2)^2}, \quad \text{. . . . .} \quad (4{,}8)$$

falls

$$l_{\mu\nu}^{(\varkappa)} = \beta_\nu^2\cdot\cos(\alpha_\mu x_\varkappa) - \frac{\alpha_\mu^2\cdot k_{\mu\nu}^{(\varkappa)}}{(-1)^\mu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a) - \beta_\nu a} \quad \text{. . . . .} \quad (4{,}81)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} k_{\mu\nu}^{(\varkappa)} = {} & \mathfrak{Sin}(\beta_\nu x_\varkappa) + (-1)^\mu\cdot\mathfrak{Sin}[\beta_\nu(a - x_\varkappa)] \\ & + \beta_\nu\cdot\{(a - x_\varkappa)\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu x_\varkappa) + (-1)^\mu\cdot x_\varkappa\cdot\mathfrak{Cof}[\beta_\nu(a - x_\varkappa)]\} \end{aligned}\right\} \quad \text{. . .} \quad (4{,}82)$$

gesetzt wird.

5. Spezialfälle. Wird das Belastungsgebiet B_0 (vgl. Abb. 1) mit der vollen Plattenmittelfläche identisch, so ist $x_1 = y_1 = 0$ sowie $x_2 = a$ und $y_2 = b$ zu setzen, und (4,6) vereinfacht sich zu

$$\left.\begin{aligned} W(x,y) = {} & \frac{y^4 - 2\,b\,y^3 + b^3 y}{24} + {\sum_{\nu=1}^{\infty}}' \frac{1-(-1)^\nu}{b\,\beta_\nu^5}\cdot\{\beta_\nu x\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu x) - 2\,\mathfrak{Cof}(\beta_\nu x)\}\cdot\sin(\beta_\nu y) \\ & + {\sum_{\nu=1}^{\infty}}' \frac{1-(-1)^\nu}{b\,\beta_\nu^5}\cdot\frac{q_\nu^{(1)}\cdot\psi_\nu^{(1)}(x) + q_\nu^{(2)}\cdot\psi_\nu^{(2)}(x)}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a) - \beta_\nu^2 a^2}\cdot\sin(\beta_\nu y) \end{aligned}\right\} \quad (5{,}1)$$

mit (4,51) und (4,53) sowie mit

$$\left.\begin{aligned} q_\nu^{(1)} &= \beta_\nu a\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a) - 2\cdot\{\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a) - 1\}, \\ q_\nu^{(2)} &= \beta_\nu\cdot\{\beta_\nu a\cdot\mathfrak{Cof}(\beta_\nu a) - \mathfrak{Sin}(\beta_\nu a)\}, \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . .} \quad (5{,}11)$$

während in der Darstellungsform (4.7)

$$L_{\mu\nu} = \frac{4\cdot\{1-(-1)^\nu\}\cdot\{1-(-1)^\mu\}}{a\,b\,\alpha_\mu \beta_\nu^3\cdot(\alpha_\mu^2 + \beta_\nu^2)^2}\cdot l_{\mu\nu} \quad \text{. . . . .} \quad (5{,}2)$$

mit

$$l_{\mu\nu} = \beta_\nu^2 - \alpha_\mu^2\cdot\frac{(-1)^\mu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a) + \beta_\nu a}{(-1)^\mu\cdot\mathfrak{Sin}(\beta_\nu a) - \beta_\nu a} \quad \text{. . . . .} \quad (5{,}21)$$

wird.

Wählen wir ferner $x_1 = x_0 - \delta$, $x_2 = x_0 + \delta$ sowie $p_0 = \dfrac{\mathsf{P}_0}{2\delta}$ und vollziehen den Grenzübergang $\delta \to 0$, so ergibt sich für die Plattendurchbiegung unter dem Einfluß einer gleichförmigen Linienbelastung vom Betrage P_0 pro Längeneinheit, die längs der zu den beiden Plattenrändern $x = 0$ und $x = a$ parallel gelegenen Strecke $x = x_0$, $y_1 \leq y \leq y_2$ angreift, gemäß (1,5) und (4,6) der Ausdruck

$$w(x,y) = \frac{\mathsf{P}_0}{N}\cdot W(x,y) \quad \text{. . . . .} \quad (5{,}3)$$

mit

$$W(x,y) = \left\{\begin{aligned} & W_0(x,y) \text{ für } 0 \leq x \leq x_0, \\ & W_0(x,y) + W_1(x,y) \text{ für } x_0 \leq x \leq a, \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . .} \quad (5{,}31)$$

wobei

$$W_1(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\{\cos(\beta_\nu y_1) - \cos(\beta_\nu y_2)\}\cdot\sin(\beta_\nu y)\cdot\chi_\nu(x) \quad \text{. . . . .} \quad (5{,}4)$$

mit

$$\chi_\nu(x) = -\frac{1}{\beta_\nu^3 b}\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(x-x_0)] + \frac{x-x_0}{\beta_\nu^3 b}\cdot\mathfrak{Cof}\,[\beta_\nu(x-x_0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}41)$$

gilt, und wobei $W_0(x, y)$ gemäß (4,5) mit (4,51) und (4,53) sowie mit

$$q_\nu^{(1)} = \frac{a-x_0}{2\,\beta_\nu^2}\cdot\mathfrak{Cof}\,[\beta_\nu(a-x_0)] + \frac{1}{2\,\beta_\nu^3}\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(a-x_0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}42)$$

und

$$q_\nu^{(2)} = \frac{a-x_0}{2\,\beta_\nu}\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(a-x_0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}43)$$

zu bilden ist; die Fourierentwicklung (4,7) ergibt

$$L_{\mu\nu} = \frac{4\cdot\{\cos(\beta_\nu y_1) - \cos(\beta_\nu y_2)\}\cdot l_{\mu\nu}}{a\,b\,\beta_\nu\cdot(\alpha_\mu^2+\beta_\nu^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}5)$$

mit

$$l_{\mu\nu} = \sin(\alpha_\mu x_0) - \alpha_\mu\cdot\frac{(-1)^\mu\cdot x_0\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(a-x_0)] - (a-x_0)\cdot\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu x_0)}{(-1)^\mu\cdot\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a) - \beta_\nu a} \quad . \qquad (5{,}51)$$

Um schließlich auch den Fall einer im Punkte (x_0, y_0) angreifenden Einzellast vom Betrage P_0 zu erfassen, haben wir in (5,3) und (5,31) die Substitution $\mathbf{P}_0 = \frac{P_0}{2\delta}$ zu machen, $y_1 = y_0 - \delta$ sowie $y_2 = y_0 + \delta$ zu setzen und den Grenzübergang $\delta \to 0$ zu vollziehen, was für die Durchbiegung

$$w(x, y) = \frac{P_0}{N}\cdot W(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}6)$$

mit

$$W(x, y) = \left\{\begin{array}{l} W_0(x, y) \text{ für } 0 \leq x \leq x_0, \\ W_0(x, y) + W_1(x, y) \text{ für } x_0 \leq x \leq a \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}61)$$

liefert, falls

$$W_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sin(\beta_\nu y_0)\cdot\sin(\beta_\nu y)\cdot\chi_\nu(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}7)$$

mit

$$\chi_\nu(x) = -\frac{1}{\beta_\nu^3 b}\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(x-x_0)] + \frac{x-x_0}{\beta_\nu^2 b}\cdot\mathfrak{Cof}\,[\beta_\nu(x-x_0)] \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}71)$$

sowie

$$W_0(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin(\beta_\nu y_0)}{b}\cdot\frac{q_\nu^{(1)}\cdot\varphi_\nu^{(1)}(x) + q_\nu^{(2)}\cdot\varphi_\nu^{(2)}(x)}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a) - \beta_\nu^2 a^2}\cdot\sin(\beta_\nu y) \qquad (5{,}8)$$

mit (4,51), (4,53) und (5,42), (5,43) gesetzt wird; die Fourierentwicklung (4,7) erhält alsdann die Koeffizienten

$$L_{\mu\nu} = \frac{4\sin(\beta_\nu y_0)\cdot l_{\mu\nu}}{a\,b\cdot(\alpha_\mu^2+\beta_\nu^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5{,}9)$$

mit (5,51).

6. Die allseitig eingespannte Platte. Uns nunmehr dem Fall der vierseitig eingespannten Rechteckplatte zuwendend, gehen wir von den Funktionen

$$\left.\begin{array}{l} f_\mu^{(1)}(x, y) = y\cdot\mathfrak{Sin}\,[\alpha_\mu(y-b)]\cdot\sin(\alpha_\mu x) = \sin(\alpha_\mu x)\cdot\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}A_{\mu\nu}^{(1)}\cdot\sin(\beta_\nu y), \\ f_\mu^{(2)}(x, y) = (y-b)\cdot\mathfrak{Sin}\,(\alpha_\mu y)\cdot\sin(\alpha_\mu x) = \sin(\alpha_\mu x)\cdot\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}B_{\mu\nu}^{(1)}\cdot\sin(\beta_\nu y) \end{array}\right\} \quad . \quad . \qquad (6{,}1)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{4\,\alpha_\mu \beta_\nu}{b\cdot(\alpha_\mu^2+\beta_\nu^2)^2}\cdot\{(-1)^\nu - \mathfrak{Cof}\,(\alpha_\mu b)\}, \\ B_{\mu\nu}^{(1)} &= -\frac{4\cdot(-1)^\nu\cdot\alpha_\mu\beta_\nu}{b\cdot(\alpha_\mu^2+\beta_\nu^2)^2}\cdot\{(-1)^\nu - \mathfrak{Cof}\,(\alpha_\mu b)\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6{,}11)$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} F_\nu^{(1)}(x,y) &= x\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(x-a)]\cdot\sin(\beta_\nu y) = \sin(\beta_\nu y)\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\nu\mu}^{(2)}\sin(\alpha_\mu x), \\ F_\nu^{(2)}(x,y) &= (x-a)\cdot\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu x)\cdot\sin(\beta_\nu y) = \sin(\beta_\nu y)\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\nu\mu}^{(2)}\cdot\sin(\alpha_\mu x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6{,}2)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A_{\nu\mu}^{(2)} &= \frac{4\,\alpha_\mu \beta_\nu}{a\cdot(\alpha_\mu^2+\beta_\nu^2)^2}\cdot\{(-1)^\mu - \mathfrak{Cof}\,(\beta_\nu a)\}, \\ B_{\nu\mu}^{(2)} &= -\frac{4\cdot(-1)^\mu\cdot\alpha_\mu\beta_\nu}{a\cdot(\alpha_\mu^2+\beta_\nu^2)^2}\cdot\{(-1)^\mu - \mathfrak{Cof}\,(\beta_\nu a)\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6{,}21)$$

aus, bilden den der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta\, W_0^*(x,y) = 0$$

genügenden Ansatz

$$\left.\begin{aligned} W_0^*(x,y) &= \sum_{\mu=1}^{\infty}\{C_\mu^{(1)}\cdot f_\mu^{(1)}(x,y) + C_\mu^{(2)}\cdot f_\mu^{(2)}(x,y)\}, \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\{C_\nu^{(3)}\cdot F_\nu^{(1)}(x,y) + C_\nu^{(4)}\cdot F_\nu^{(2)}(x,y)\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6{,}3)$$

und suchen hierin über die willkürlich wählbaren Konstanten derart zu verfügen, daß neben den bereits erfüllten Beziehungen

$$[W_0^*(x,y)]_{x=0} = [W_0^*(x,y)]_{x=a} = [W_0^*(x,y)]_{y=0} = [W_0^*(x,y)]_{y=b} = 0 \quad \ldots \quad (6{,}31)$$

überdies die beiden Randbedingungen

$$\left[\frac{\partial W_0^*}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial W_0^*}{\partial x}\right]_{x=a} = 0 \quad \ldots \quad (6{,}32)$$

befriedigt werden. Indem wir (6,3) mit Benutzung von (6,1) in der Form

$$W_0^*(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{ C_\nu^{(3)}\cdot x\cdot\mathfrak{Sin}\,[\beta_\nu(x-a)] + C_\nu^{(4)}\cdot(x-a)\cdot\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu x) + \sum_{\mu=1}^{\infty}[C_\mu^{(1)}\cdot A_{\mu\nu}^{(1)} + C_\mu^{(2)}\cdot B_{\mu\nu}^{(1)}]\cdot\sin(\alpha_\mu x)\right\}\cdot\sin(\beta_\nu y)$$

schreiben, liefert dies die beiden Relationen

$$\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a)\cdot C_\nu^{(3)} + \beta_\nu a\cdot C_\nu^{(4)} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha_\mu\cdot\{C_\mu^{(1)}\cdot A_{\mu\nu}^{(1)} + C_\mu^{(2)}\cdot B_{\mu\nu}\},$$

$$\beta_\nu a\cdot C_\nu^{(3)} + \mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a)\cdot C_\nu^{(4)} = -\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^\mu\cdot\alpha_\mu\cdot\{C_\mu^{(1)}\cdot A_{\mu\nu}^{(1)} + C_\mu^{(2)}\cdot B_{\mu\nu}^{(1)}\},$$

aus denen sich

$$\left.\begin{aligned} C_\nu^{(3)} &= \frac{\sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha_\mu\cdot\{\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a) + (-1)^\mu\cdot\beta_\nu a\}\cdot\{A_{\mu\nu}^{(1)}\cdot C_\mu^{(1)} + B_{\mu\nu}^{(1)}\cdot C_\mu^{(2)}\}}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a) - \beta_\nu^2 a^2}, \\ C_\nu^{(4)} &= \frac{-\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^\mu\cdot\alpha_\mu\cdot\{\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a) + (-1)^\mu\cdot\beta_\nu a\}\cdot\{A_{\mu\nu}^{(1)}\cdot C_\mu^{(1)} + B_{\mu\nu}^{(1)}\cdot C_\mu^{(2)}\}}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a) - \beta_\nu^2 a^2} \end{aligned}\right\} \quad (6{,}33)$$

berechnet. Greifen wir sodann auf die durch (1,5) eingeführte, in (4,6) bzw. (4,7) angegebene Funktion $W(x, y)$ zurück, so wird der Ausdruck

$$w^*(x, y) = \frac{p_0}{N} \cdot \{W(x, y) + W_0^*(x, y)\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6,4)$$

die Durchbiegung der allseitig eingespannten Rechteckplatte darstellen, falls die beiden in (6,3) noch frei verfügbaren Konstantensysteme $C_\mu^{(1)}$ und $C_\mu^{(2)}$ derart bestimmt werden, daß

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\{W(x, y) + W_0^*(x, y)\}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\{W(x, y) + W_0^*(x, y)\}\right]_{y=b} \quad \ldots \quad (6,41)$$

gilt. Dies gelingt aber durch den gemäß (6,3) und (6,2) gebildeten Ansatz

$$W_0^*(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big\{ C_\mu^{(1)} \cdot y \cdot \mathfrak{Sin}\,[a_\mu (y-b)] + C_\mu^{(2)} \cdot (y-b) \cdot \mathfrak{Sin}\,(a_\mu y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [C_\nu^{(3)} \cdot A_{\nu\mu}^{(2)} + C_\nu^{(4)} \cdot B_{\nu\mu}^{(2)}] \cdot \sin(\beta_\nu y) \Big\} \cdot \sin(a_\mu x),$$

demzufolge mit Benutzung von (4,7)

$$\frac{\partial}{\partial y}\{W(x,y) + W_0^*(x,y)\} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot L_{\mu\nu} \cdot \cos(\beta_\nu y) + C_\mu^{(1)} \cdot \mathfrak{Sin}\,[a_\mu (y-b) + a_\mu \cdot C_\mu^{(1)} \cdot y \cdot \mathfrak{Cof}\,[a_\mu (y-b)] + C_\mu^{(2)} \cdot \mathfrak{Sin}\,(a_\mu y) + a_\mu \cdot C_\mu^{(2)} \cdot (y-b) \cdot \mathfrak{Cof}\,(a_\mu y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot [C_\nu^{(3)} \cdot A_{\nu\mu}^{(2)} + C_\nu^{(4)} \cdot B_{\nu\mu}^{(2)}] \cdot \cos(\beta_\nu y) \Big\} \cdot \sin(a_\mu x)$$

wird, so daß (6,41) die Gleichungssysteme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot L_{\mu\nu} - \mathfrak{Sin}\,(a_\mu b) \cdot C_\mu^{(1)} - a_\mu b \cdot C_\mu^{(2)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot \{C_\nu^{(3)} \cdot A_{\nu\mu}^{(2)} + C_\nu^{(4)} \cdot B_{\nu\mu}^{(2)}\} = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \beta_\nu \cdot L_{\mu\nu} + a_\mu b \cdot C_\mu^{(1)} + \mathfrak{Sin}\,(a_\mu b) \cdot C_\mu^{(2)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \beta_\nu \cdot \{C_\nu^{(3)} \cdot A_{\nu\mu}^{(2)} + C_\nu^{(4)} \cdot B_{\nu\mu}^{(2)}\} = 0$$

ergibt. Hieraus folgt nach Einführung von (6,33) unter Beachtung von (6,11) und (6,21) durch Addition

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot \{1 + (-1)^\nu\} \cdot L_{\mu\nu} - \{C_\mu^{(1)} - C_\mu^{(2)}\} \cdot \{\mathfrak{Sin}\,(a_\mu b) - a_\mu b\} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{a_\varrho \beta_\nu \cdot A_{\varrho\nu}^{(1)} \cdot A_{\nu\mu}^{(2)} \cdot \{\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a) + (-1)^\varrho \cdot \beta_\nu a\} \cdot \{1 + (-1)^{\mu+\varrho}\}}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a) - \beta_\nu^2 a^2} \\ &\qquad \cdot \{1 + (-1)^\nu\} \cdot \{C_\varrho^{(1)} - C_\varrho^{(2)}\} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6,51)$$

hingegen durch Subtraktion

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot \{1 - (-1)^\nu\} \cdot L_{\mu\nu} - \{C_\mu^{(1)} + C_\mu^{(2)}\} \cdot \{\mathfrak{Sin}\,(a_\mu b) + a_\mu b\} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{a_\varrho \beta_\nu \cdot A_{\varrho\nu}^{(1)} \cdot A_{\nu\mu}^{(2)} \cdot \{\mathfrak{Sin}\,(\beta_\nu a) + (-1)^\varrho \cdot \beta_\nu a\} \cdot \{1 + (-1)^{\mu+\varrho}\}}{\mathfrak{Sin}^2(\beta_\nu a) - \beta_\nu^2 a^2} \\ &\qquad \cdot \{1 - (-1)^\nu\} \cdot \{C_\varrho^{(1)} + C_\varrho^{(2)}\} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6,52)$$

womit zwei voneinander unabhängige Systeme von Bestimmungsgleichungen zunächst für $C_\mu^{(1)} - C_\mu^{(2)}$ bzw. $C_\mu^{(1)} + C_\mu^{(2)}$ und damit auch für $C_\mu^{(1)}$ und $C_\mu^{(2)}$ aufgefunden sind.

Die Berechnung der Gleichgewichtslage von gemessenen Schwingungen auf Grund der Fehlertheorie[1].

Von *Max Schuler* in Göttingen.

Wenn ich eine so einfache Sache wie die Berechnung der Gleichgewichtslage von Schwingungen hier behandle, so geschieht dies deshalb, weil man in allen Büchern falsche Darstellungen darüber findet. Ich glaube, daß ein kurzer Hinweis genügen wird, um die ererbten Fehler in Zukunft auszumerzen.

Kohlrausch sagt in seinem Lehrbuch der praktischen Physik über die Bestimmung der Gleichgewichtslage: „Man wähle eine ungerade Zahl von Umkehrpunkten, nehme das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen auf der einen Seite und aus denen auf der anderen Seite. Aus diesen beiden Zahlen bilde man wieder das Mittel." Diese Vorschrift, die man fast in allen Lehrbüchern findet, ist falsch aus folgenden Gründen:

1. Es ist unzweckmäßig, bei einer geraden Zahl von Beobachtungen eine Beobachtung herauszuwerfen, die man vielleicht mit vieler Mühe gemacht hat.
2. Die eine Seite wird mehr bewertet als die andere Seite; denn das Mittel der beiden Seiten ist aus einer verschiedenen Anzahl von Beobachtungen gewonnen.
3. Kohlrauschs Rechnung gibt falsche Werte bei gedämpften Schwingungen.
4. Man erhält trotz vieler Beobachtungen keinen mittleren Fehler und damit keinen Aufschluß über die Genauigkeit der bestimmten Gleichgewichtslage.

Im Gegensatz zu Kohlrausch sagen die Herren vom Vermessungswesen[2]): Man bestimme diejenige e-Funktion, die sich den beobachteten Umkehrpunkten am besten anpaßt, für die also gilt:

$$\Sigma v^2 = \text{Minimum}.$$

Diese Vorschrift macht nicht nur viel Rechenarbeit, sondern ist ebenfalls falsch, wie ich im folgenden beweisen werde.

Bei der Berechnung der Gleichgewichtslage wollen wir drei Fälle unterscheiden:

a) Keine Dämpfung; d. h., während einer einzigen Periode kann der Schwingungsabfall vernachlässigt werden.
b) Kleine Dämpfung; d. h., während einer einzigen Periode kann der Schwingungsabfall als geradlinig angesehen werden.
c) Große Dämpfung; d. h., man muß der Rechnung eine e-Funktion zugrunde legen, welche die Amplituden begrenzt.

Haben wir ν Umkehrpunkte beobachtet, so ergibt dies $n = \nu - 1$ Schwingungsbogen. Im Falle daß keine Dämpfung vorhanden ist, bilden wir das Mittel L jedes einzelnen Schwingungsbogens (siehe Abb. 1):

$$L_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}; \qquad L_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}; \quad \text{usw.}$$

Als Gleichgewichtslage ergibt sich:

$$G_a = \frac{\Sigma L}{n}$$

$$G_a = \frac{\frac{a_1 + a_\nu}{2} + \sum_2^{\nu-1} a}{\nu - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

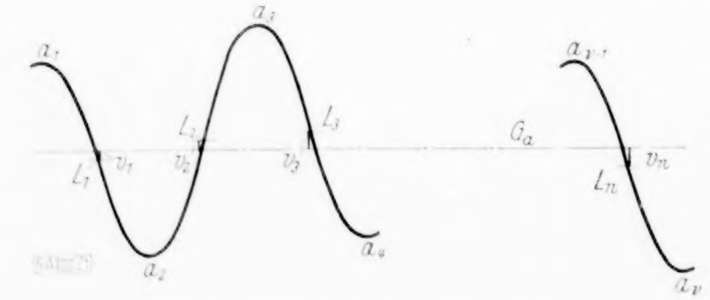


Abb. 1. Fall a; keine Dämpfung.

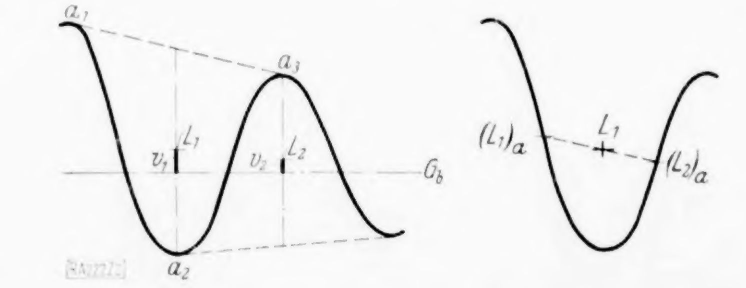


Abb. 2. Fall b; kleine Dämpfung.

[1]) Nach dem bei der Tagung des Ausschusses für mechanische Schwingungen des V. D. I. in München 1931 gehaltenen Vortrag „Berechnung der Gleichgewichtslage von Schwingungen".

[2]) Basch, Mitteilungen aus dem Markscheidewesen 1917 und P. Wilski, ebenda 1922.

Wir haben das arithmetische Mittel aus sämtlichen Umkehrpunkten zu bilden, wobei aber der erste und letzte Umkehrpunkt nur halb zu bewerten sind. Diese Bewertung ist auch logisch berechtigt, da man Störungen in der Nähe des ersten und letzten Umkehrpunktes nicht so gut erkennen kann wie Störungen innerhalb des Schwingungsbildes. Bei dieser Rechenregel ist es gleichgültig, ob die Zahl der Umkehrpunkte gerade oder ungerade ist. Man hat stets gleiche Gewichte für jede Schwingungsseite. Die Rechenregel ist jetzt einwandfrei und auch einfacher als die von Kohlrausch angegebene. Aus den Abweichungen v der Bogenmitten L gegen die Gleichgewichtslage G_a erhält man den mittleren Fehler für eine Bogenmitte L:

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{\nu - 2}}$$

und den Fehler der Gleichgewichtslage:

$$m_G = \frac{m_L}{\sqrt{\nu - 1}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(\nu - 2)(\nu - 1)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Dieser mittlere Fehler ist richtig, wenn jeder Schwingungsbogen eine „unabhängige Beobachtung" ist. Dynamisch ist dies sicher der Fall. Liegen aber Ablesungsfehler des Umkehrpunktes vor, so gehen diese in zwei Bogenmessungen mit gleicher Größe ein. Der Fehler kann in diesem Fall bis auf das $\sqrt{2}$fache des oben gegebenen Wertes ansteigen. Man muß also bestrebt sein, die Ablesefehler klein zu halten. Diese Überlegung gilt auch für alle folgenden Fälle. Bei kleiner Dämpfung können wir geradlinigen Amplitudenabfall voraussetzen (Abb. 2). Wir bilden dann das Mittel zwischen drei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten, wobei die beiden auf derselben Seite liegenden nur halb bewertet werden. Es ergeben sich $n = \nu - 2$ Mittelwerte:

$$L_1 = \frac{\frac{a_1 + a_3}{2} + a_2}{2}; \text{ usw.}$$

Daraus erhält man die Gleichgewichtslage:

$$G_b = \frac{\Sigma L}{n}$$

$$G_b = \frac{\frac{1}{4}(a_1 + a_\nu) + \frac{3}{4}(a_2 + a_{\nu-1}) + \sum_3^{\nu-2} a}{\nu - 2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

D. h.: Bei der Mittelbildung ist die erste und letzte Amplitude zu 1/4, die zweite und vorletzte zu 3/4 zu bewerten; alle übrigen sind voll zu bewerten. Die geringe Bewertung des ersten und letzten Umkehrpunktes ist wieder folgerichtig, denn man kennt hier weder Schwingungs- noch Dämpfungsstörungen, während sich diese bei den mittleren Umkehrpunkten aus dem Schwingungsbild erkennen lassen. Der Wert G_b der Gl. (3) geht in G_a der Gl. (1) über, wenn ν groß ist. D. h.: Bei einer großen Anzahl von beobachteten Umkehrpunkten, die aufeinanderfolgen, kann die Dämpfung für die Berechnung der Gleichgewichtslage vernachlässigt werden.

Dagegen kann der mittlere Fehler, den man aus den Gl. im Fall a und b erhält, bei Dämpfung erheblich verschieden werden. Als mittlerer Fehler eines Mittels ergibt sich:

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{\nu - 3}}.$$

v ist die Abweichung eines Mittels L von der berechneten Gleichgewichtslage. Da L entstanden ist durch die Mittelung von zwei Werten L_a (siehe Abb. 2), so kann man den Satz aufstellen:

$$(m_L)_a = (m_L)_b \cdot \sqrt{2}.$$

Der mittlere Fehler der Gleichgewichtslage wird dann:

$$m_G = \frac{(m_L)_b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\nu - 1}} = \pm \sqrt{\frac{2 \Sigma v^2}{(\nu - 3)(\nu - 1)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Man kann dies sofort schließen aus der Gl. (2).

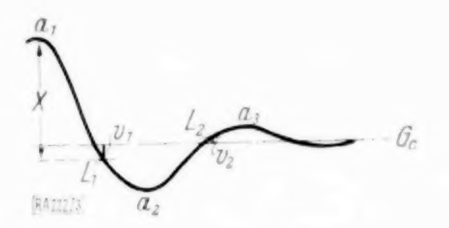


Abb. 3. Fall c; große Dämpfung.

Im Falle der großen Dämpfung muß man jeden Schwingungsbogen im Dämpfungsverhältnis $\varkappa$ teilen und erhält so die einzelnen Gleichgewichtslagen L der Bögen (Abb. 3). Dabei bestimmt sich $\varkappa$ aus der Bedingung:

$$\varkappa_1 = \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2}; \qquad \varkappa_2 = \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_2}; \quad \text{usw.}$$

$\varkappa$ sei eine stetige Funktion der Amplitude, es braucht aber keine Konstante zu sein. Doch sei es erlaubt, für die Dauer einer Schwingungsperiode mit einem mittleren konstanten Wert $\varkappa$ zu rechnen. Dann ergibt sich nach der Abb. 3:

$$x = \frac{a_1 - a_2}{1 + \varkappa_1}; \qquad L_1 = a_1 - x\,.$$

$$L_1 = \frac{\varkappa_1\, a_1 + a_2}{1 + \varkappa_1};$$

$$L_2 = \frac{\varkappa_2\, a_2 + a_3}{1 + \varkappa_2}; \quad \text{usw.}$$

Daraus berechnet sich die Gleichgewichtslage:

$$G_c = \frac{\Sigma L}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_1^{\nu-1} \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\, a + \sum_2^{\nu} \frac{1}{1+\varkappa} \cdot a\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5\,\text{a}).$$

Für konstantes $\varkappa$ vereinfacht sich die Gleichung:

$$G_c = \frac{1}{(\nu - 1)} \cdot \left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa} \cdot a_1 + \frac{1}{1+\varkappa} \cdot a_\nu + \sum_2^{\nu-1} a\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5\,\text{b}).$$

Es ist hier wieder bezeichnend, daß sich die Dämpfung bei konstantem $\varkappa$ nur in der Bewertung des ersten und letzten Gliedes bemerkbar macht. Je größer die Dämpfung ist, um so weniger wird der erste Umkehrpunkt und um so stärker der letzte Umkehrpunkt bewertet. Die Summe der beiden Glieder hat immer das Gewicht 1. Bei allen mittleren Gliedern fällt für die Berechnung der Gleichgewichtslage die Dämpfung vollkommen heraus. G_c geht in den Wert G_a über, wenn die Dämpfung null wird; denn hierfür ist $\varkappa = 1$. Damit wird

$$\frac{\varkappa}{1+\varkappa} = \frac{1}{1+\varkappa} = \frac{1}{2}; \text{ für Dämpfung null.}$$

G_c unterscheidet sich bei größerem ν kaum von G_a. Man kann also sagen: Formel 1 genügt immer zur Berechnung der Gleichgewichtslage, wenn eine größere Anzahl von Umkehrpunkten, die aufeinanderfolgen, beobachtet ist.

Der mittlere Fehler berechnet sich ganz ähnlich wie im Falle a. Wir haben nur jetzt zwei Anschlußbedingungen und erhalten deshalb als mittleren Fehler von L:

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n - 2}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{\nu - 3}}\,.$$

Als mittlerer Fehler der Gleichgewichtslage ergibt sich:

$$m_G = \frac{m_L}{\sqrt{n}}$$

$$m_G = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(\nu - 3)(\nu - 1)}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6).$$

Die Fehlergleichung (6) im Falle c deckt sich mit der Gl. (2) des Falles a, nur daß jetzt eine Anschlußbedingung mehr vorhanden ist. Dagegen unterscheidet sie sich von der Fehlergleichung (4) des Falles b um den Wert $\sqrt{2}$. Dies beruht darauf, daß wir im Falle b das Mittel von 2 Bogenmitteln der Fehlerrechnung zugrunde legten und deshalb für Σv^2 nur den halben Wert erhielten.

Nun sieht man auch, welcher Fehler in der Vermessungskunde gemacht wird, wo die Abweichung Δ jedes Umkehrpunktes gegen eine idealisierte Schwingungskurve der Fehlerberechnung zugrunde gelegt wird, während ich nur die Abweichung v der Mittellagen gegen die Gleichgewichtslage berücksichtige. In Abb. 4 und 5 sind die beiden typischen Fehlerfälle dargestellt. Bei Abb. 4 wird die Amplitude gestört, während die Gleichgewichtslage erhalten bleibt. Bei meinen Gleichungen geht nur die eine gestörte Amplitude mit ihrem Fehler v in die Rechnung ein, während bei Zugrundelegung der Umkehrpunkte gerade die fehlerfreien Schwingungen mit den größten Abweichungen Δ belastet werden. In Abb. 5 ist die Gleichgewichtslage gestört, während die Amplitude geblieben ist. Man sieht auch hier, daß meine Rechnung richtig den Fehler v ergibt, während die Werte Δ streuen.

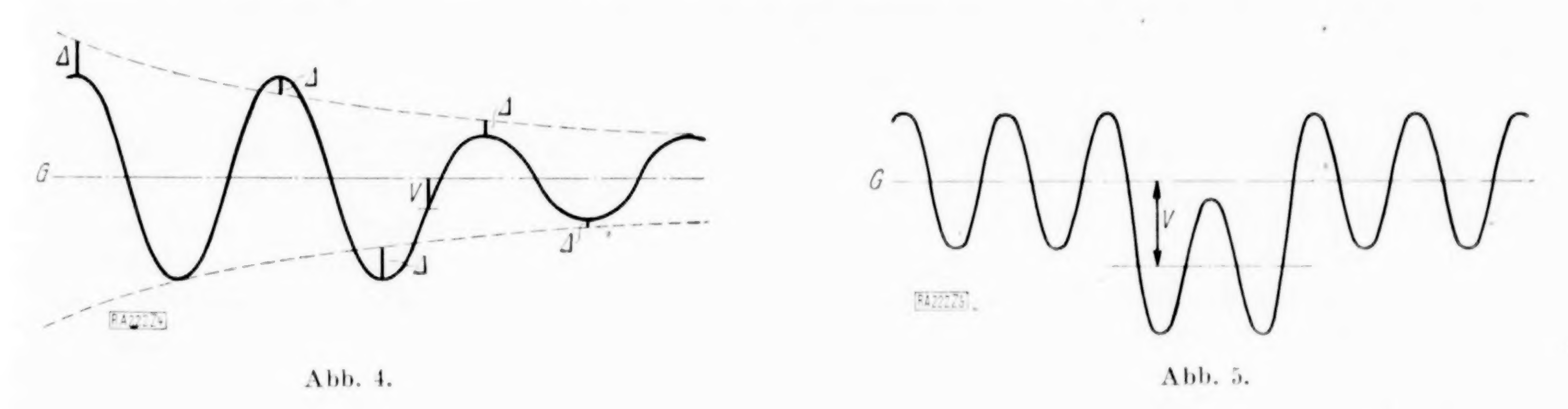


Abb. 4. Abb. 5.

Man muß also die beiden möglichen Fälle, Störung der Amplitude und Störung der Gleichgewichtslage, streng auseinanderhalten. Hier interessiert nur die Gleichgewichtslage mit ihren Fehlern, und es dürfen nicht Schwankungen der Amplitude und der Dämpfung als Fehler der Gleichgewichtslage gewertet werden.

Algebraisch ist der Beweis für die Richtigkeit meines Rechnungsverfahrens für den Fall ohne Dämpfung leicht erbracht. Ist Δ der Fehler eines Umkehrpunktes und v der Fehler eines Bogenmittels, so gilt:

$$v_1 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}; \qquad v_2 = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{2}; \; \dots . \qquad v_{\nu-1} = \frac{\Delta_{\nu-1} + \Delta_\nu}{2}$$

$$\Sigma v^2 = \frac{1}{2}\left(\Sigma \Delta^2 - \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_\nu^2) + \Sigma \Delta \Delta\right).$$

Nach den Regeln der Vermessungskunde bekommt man einen mittleren Fehler der Gleichgewichtslage:

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{(\nu - 2) \cdot \nu}}; \quad 2 = \text{Anzahl der Anschlußbedingungen.}$$

Nach Gl. (2) ergibt sich dagegen ein mittlerer Fehler

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2 - \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_\nu^2) + \Sigma \Delta \Delta}{(\nu - 2)(\nu - 1) \cdot 2}}.$$

Der erste Teil des Zählers unterscheidet sich dadurch, daß die erste und die letzte Beobachtung bei m_2 nur halbwertig gezählt sind. Bei größerem ν macht dies aber nicht viel

aus. Im Zähler steht aber bei m_2 das Glied $\Sigma \Delta \Delta$, und dieses ist von ausschlaggebender Bedeutung.

1. Wählen wir in dem Ausdruck $\Delta \cdot \Delta$ alle Glieder positiv, so wird:

$$\Sigma \Delta \Delta \sim + \Sigma \Delta^2.$$

Dies ist der Fall, wenn alle Δ gleiche Vorzeichen haben, also nach derselben Seite gehen. Dies heißt, die Gleichgewichtslage schwankt um den Wert Δ, während die Amplituden ihre gleiche Größe beibehalten, wie dies in Abb. 5 dargestellt ist. Dann wird:

$$m_1 \sim m_2 .$$

2. Werden alle Glieder $\Delta \cdot \Delta$ negativ, so wird:

$$\Sigma \Delta \Delta \sim - \Sigma \Delta^2,$$

m_2 wird dann sehr klein. Dies ist der Fall, wenn die Gleichgewichtslage immer dieselbe bleibt und nur die Amplituden schwanken, wie dies in Abb. 4 dargestellt ist. Die beiden Extremwerte von Fall 1 und 2 sind natürlich nie zu erreichen, da im Falle 1 zum mindesten bei einer Schwingung, nämlich bei dem Übergang von einer Gleichgewichtslage zur andern, die Amplitude schwanken muß und im Fall 2 beim Übergang von einer Amplitudengröße zur andern die Gleichgewichtslage einmal falsch bestimmt wird.

3. Sind die positiven und negativen Glieder gleichmäßig verteilt, so wird:

$$\Sigma \Delta \Delta \approx 0 .$$

Die Gleichgewichtslage und die Amplitude schwanken etwa um dieselben Werte. Es ergibt sich dann:

$$m_1 = m_2 \cdot \sqrt{2} .$$

Aus diesen Betrachtungen ersieht man, daß die beiden Fehlerrechnungen völlig verschiedene Werte ergeben. Da nun bei der vorliegenden Aufgabe nur die Gleichgewichtslagen und nicht die Größen der Amplituden und ihre Schwankungen interessieren, so ist es richtiger, nach den neuen Gleichungen zu rechnen und aus den einzelnen Mittellagen den mittleren Fehler zu bestimmen. Man darf nicht die Umkehrpunkte der Fehlerrechnung zugrunde legen wie dies von der Vermessungskunde vorgeschlagen wird.



Abb. 6. Abb. 7.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß in manchen Fällen die Gleichgewichtslage nicht mit der Mittellage des Schwingungsbogens zusammenfällt [3]). Ist nämlich die Funktion der rückführenden Kraft (P) unsymmetrisch zu G (Abb. 6), so wird die eine Amplitude (a_2) größer als die andere (a_1). Die Gleichgewichtslage (G) ist bestimmt durch die Bedingung $P = 0$. Sie fällt mit der Ruhelage des Systems zusammen. Der Energiesatz verlangt:

$$\int_G^{+a_1} + P \cdot dx = \int_G^{-a_2} - P \cdot dx .$$

D. h. die in der Abb. 6 schraffierten Flächen müssen gleich sein. Man sieht aus dieser Darstellung, daß die Abweichungen der Bogenmitten (L) von der Gleichgewichtslage mit wachsender Amplitude zunehmen. Trägt man L als Funktion der Amplitude oder der Anzahl n der verstrichenen Schwingungen auf, so erhält man in diesem Falle keine um die Gleichgewichtslage streuenden Messungen, wie es die Wahrscheinlichkeitstheorie verlangt, sondern eine Kurve, die sich mit wachsendem n, d. h. mit abnehmender Amplitude, asymptotisch einem bestimmten Werte nähert, der mit der Gleichgewichtslage (G) zusammenfällt (Abb. 7). Benutzt man die hier angegebenen Rechnungsmethoden für L, so kann man mit Hilfe einer graphischen Darstellung auch in diesen verwickelten Fällen die Gleichgewichtslage richtig finden. 222

[3]) Dr. Fromm, Berlin, machte bei der Diskussion des Vortrags hierauf aufmerksam.

Das Wirbelsystem der ebenen turbulenten Strömung.

Von *F. Magyar* in Wien.

Betrachtet man etwa die von Nikuradse[1]) mittels einer mit der Strömung weitergeführten Kamera aufgenommenen Bilder einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung, so erscheint zunächst jeder Versuch, in die Verhältnisse einzudringen, wenig aussichtsreich. Man erkennt wohl eine gewisse Symmetrie bezüglich der mittleren Stromschichte und muß alle Zweifel an der Existenz einer der Hauptströmung überlagerten Zusatzströmung endgültig fallen lassen; mehr aber läßt sich aus den Bildern unmittelbar kaum entnehmen. Und doch können diese eigenartigen, scheinbar regellosen Strömungsvorgänge in gewissem Sinne nur ein Abbild der Vorgänge in der Grenzschicht sein, deren Anteil gerade bei der turbulenten Strömung außerordentlich an Bedeutung gewinnt.

Wenn man nun nach Prandtl[2]) annehmen kann, daß in der Grenzschicht durch die Reibung Wirbel entstehen können, weil in ihr die Geschwindigkeit auf 0 abfällt, so darf man nach Lagally[3]) auch umgekehrt das Wirbelsystem als Ursache der Reibung ansehen. Das Wirbelsystem kann dann analog der quellenmäßigen Darstellung als Ursache der ganzen Strömung aufgefaßt werden. Die Reibung verringert die Wirbelstärke und bremst dadurch die ganze Strömung. Der dem folgenden vorangestellte Grundgedanke, die Untersuchung beim Studium des Wirbelsystems zu beginnen, verdankt demnach sein Entstehen in gleicher Weise der Prandtlschen Grenzschichttheorie und der Theorie der Wirbelschichten von Lagally.

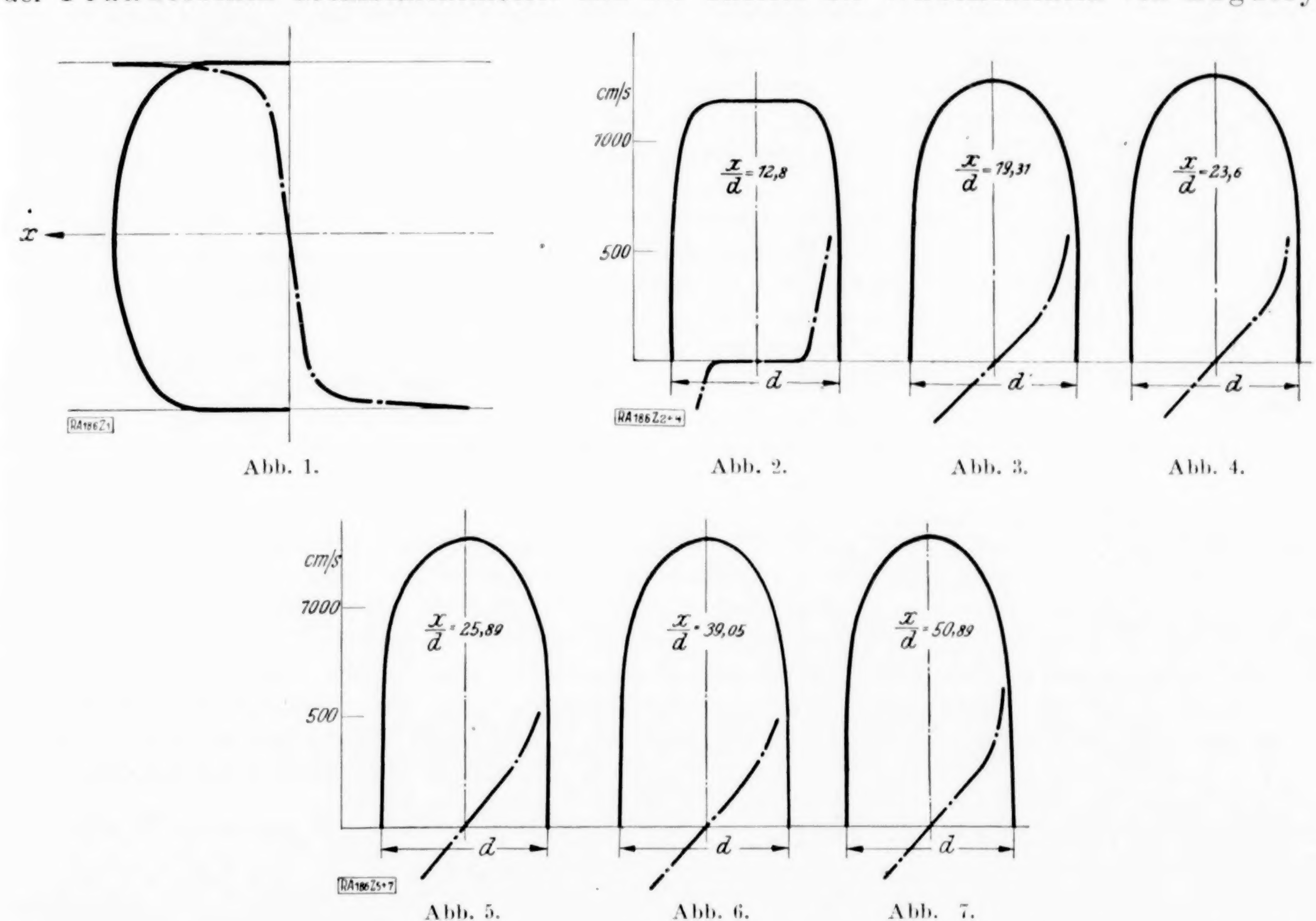


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3. Abb. 4.

Abb. 5. Abb. 6. Abb. 7.

Zunächst wurden nun Wirbelverteilungen über Querschnitte an Hand versuchsmäßig bestimmter Geschwindigkeitskurven durch graphische Differentiation ermittelt. Als Beispiele können die Abb. 1 bis 7 dienen. Die Geschwindigkeitskurve der Abb. 1 ist einer Arbeit von Prandtl[4]) entnommen, während den Abb. 2 bis 7, aufgenommen für verschiedene relative Anlauflängen $\frac{x}{d}$ eines glatten Messingrohres vom Durchmesser $d = 7{,}6$ cm, in welches durch einen gut abgerundeten Trichter Luft gesaugt wird, die Arbeit von Schiller und Kirsten[5])

---

[1]) J. Nikuradse, Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. (Göttinger Dissertation.) Forsch.A.d.V.D I. Heft 281 und auch Prandtl, Neuere Turbulenzforschung, hydr. Probleme, V.D.I.-Verlag 1926.

[2]) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsströmungen bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. Int. Math. Kongr. in Heidelberg 1904.

[3]) M. Lagally, Zur Theorie der Wirbelschichten. Sitz.-Ber. d. kön. bayr. Ak. d. Wiss. math. phyl. Kl. 1915.

[4]) L. Prandtl, Neuere Turbulenzforschung, Hydr. Probleme. V.D.I.-Verlag 1926.

[5]) L. Schiller und H. Kirsten, Die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Rohrströmung. Z. f. techn. Phys. 1929 Nr. 7.

zugrunde liegt. Mit Ausnahme der für die kleinste Anlauflänge gültigen Abb. 2 erkennt man bei allen den linearen Anteil der nahezu laminaren Kernströmung; gegen die Wand zu steigt die Wirbelkurve steil an. Allerdings hat man auf diese Weise den Anteil der überlagerten Querströmung, der das Wirbelbild zu einer Funktion der Längsrichtung und der Zeit macht, noch nicht erfaßt. Gerade aber diese der Hauptströmung überlagerte Zusatzbewegung kann allein Klarheit über das Wesen des turbulenten Zustandes bringen.

Im folgenden wird zunächst eine ebene, nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckte Strömung zwischen parallelen ebenen Wänden untersucht. Um allen Forderungen gerecht zu werden, denkt man sich das Wirbelsystem aus einzelnen Anteilen zusammengesetzt. Die innere Flüssigkeitsreibung bedingt die lineare Wirbelkurve der laminaren Strömung, die bekannt und leicht auszuwerten ist. Der Anteil der stark wirbelnden Grenzschicht setzt sich zusammen aus einem konstanten Mittelwert der Zirkulation Γ und aus den Schwankungen um denselben. Der konstante Mittelwert bedingt eine von Lagally[6]) beschriebene Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeit, die an der Grenzschicht auf den halben Wert absinkt und diese mitzunehmen sucht. Die erwähnten Schwankungen der Zirkulation müssen vorhanden sein, wenn die immer wieder beobachtete Zusatzbewegung möglich sein soll. Sie treten dort auf, wo der Impulsaustausch der Strömung am größten ist, nämlich am inneren Rand der Grenzschicht. Die physikalische Realität dieser Annahme wird sofort klar, wenn man überlegt, daß eine gleichförmige Grenzschicht als Sonderfall am unwahrscheinlichsten ist.

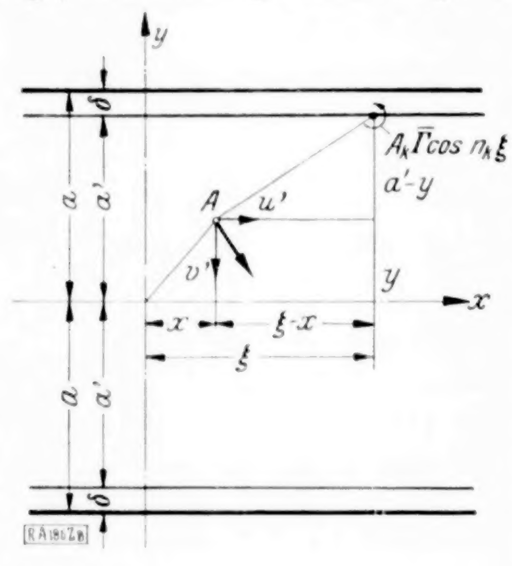


Abb. 8.

Setzt man nun mit Rücksicht auf eine Fourier-Entwicklung eine allgemeine periodische Funktion an, so erhält man für die Schwankung der Zirkulation:

$$\vartheta \Gamma = \bar{\Gamma} A_k \cos n_k (\xi - c\,t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Diese Schwankungen haben aber Zusatzgeschwindigkeiten u' und v' in der x und y Richtung zur Folge, die ihrerseits wieder auf die Grenzschicht zurückwirken[7]) und die Wirbeldichte an den Maximalstellen in der idealen Flüssigkeit ständig, in der zähen bis zu einem durch die Reibung bedingten Beharrungswert erhöhen. An den Minimalstellen nimmt umgekehrt die Wirbeldichte ab. A_k ist ein vorläufig beliebiger Beiwert, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen. Zur Zeit $t = 0$ bestimmen sich die Zusatzgeschwindigkeiten mit Hilfe der Biot-Savartschen Gleichung wie folgt:

$$u' = \frac{A_k \bar{\Gamma}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a' - y) \cos n_k \xi}{(\xi - x)^2 + (a' - y)^2} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a' + y) \cos n_k \xi}{(\xi - x)^2 + (a' + y)^2} d\xi \right]^{8)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Substituiert man $\xi - x = X, \qquad d\xi = dX,$

so wird

$$u' = \frac{A_k \bar{\Gamma}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a' - y) \cos n_k (X + x)}{X^2 + (a' - y)^2} dX + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a' + y) \cos n_k (X + x)}{X^2 + (a' + y)^2} dX \right]$$

$$= \frac{A_k \bar{\Gamma}}{2\pi} (a' - y) \left[\cos n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n_k X}{X^2 + (a' - y)^2} dX}_{^{9)}\; 2\int_0^{\infty} = \frac{\pi}{a' - y} e^{-n_k (a' - y)}} - \sin n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n_k X}{X^2 + (a' - y)^2} dX}_{0} \right]$$

$$+ \frac{A_k \bar{\Gamma}}{2\pi} (a' + y) \left[\cos n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n_k X}{X^2 + (a' + y)^2} dX}_{^{9)}\; 2\int_0^{\infty} = \frac{\pi}{a' + y} e^{-n_k (a' + y)}} - \sin n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n_k X}{X^2 + (a' + y)^2} dX}_{0} \right]$$

[6]) [7]) Lagally a. a. O.

[8]) Die Vorzeichen der Integrale lassen sich am besten direkt aus der Abb. 8 entnehmen.

[9]) O. Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, II. Teil, S. 219, Teubner 1900, und auch Madelung, Die math. Hilfsmittel des Physikers, Springer 1922.

Infolge des Vorzeichenwechsels von $\sin n_k X$ im Intervall $-\infty$ bis 0 verschwinden das zweite und vierte Integral der rechten Gleichungsseite und man erhält

$$u' = A_k \Gamma \cdot \frac{1}{2} \left(e^{-n_k(a'-y)} + e^{-n_k(a'+y)}\right) \cdot \cos n_k x = A_k \Gamma \cdot e^{-n_k a'} \cdot \cos n_k x \cdot \mathfrak{Cos}\, n_k y \quad (3).$$

Analog ergibt sich

$$v' = -\frac{A_k \Gamma}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)\cos n_k \xi}{(\xi - x)^2 + (a' - y)^2} d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)\cos n_k \xi}{(\xi - x)^2 + (a' + y)^2} d\xi\right].$$

Mit der gleichen Substitution wie oben erhält man nach Zerlegung

$$v' = -\frac{A_k \Gamma}{2\pi}\Bigg[\cos n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X \cos n_k X}{X^2 + (a' - y)^2} dX}_{0} - \sin n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X \sin n_k X}{X^2 + (a' - y)^2} dX}_{^{10)}\ 2\int_0^\infty = \pi \cdot e^{-n_k(a'-y)}}\Bigg]$$

$$+ \frac{A_k \Gamma}{2\pi}\Bigg[\cos n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X \cos n_k X}{X^2 + (a' + y)^2} dX}_{0} - \sin n_k x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X \sin n_k X}{X^2 + (a' + y)^2} dX}_{^{10)}\ 2\int_0^\infty = \pi \cdot e^{-n_k(a'+y)}}\Bigg].$$

Somit wird:

$$v' = A_k \Gamma e^{-n_k a'} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{n_k y} - e^{-n_k y}\right) \cdot \sin n_k x = A_k \Gamma e^{-n_k a'} \cdot \sin n_k x \cdot \mathfrak{Sin}\, n_k y \quad . \quad . \quad (4).$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, genügen diese Zusatzgeschwindigkeiten der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0.$$

Die zusätzliche Bewegung klingt gegen die Mitte zu ab und bleibt am inneren Rande der Grenzschicht in der Größenordnung der angenommenen Schwankungen. Wie v. Mises[11]) gezeigt hat, genügen ganz kleine Zusatzgeschwindigkeiten, um das gänzlich veränderte Strömungsbild der Turbulenz zu erklären. Die schon wiederholt versuchte Annahme von Störungen, die gegen die Wand zu durchweg abklingen, führt auf Widersprüche, da der Einfluß der Grenzschicht mit wachsender Entfernung abnehmen muß. In der Grenzschicht selbst müssen allerdings die Störungen gegen die Wand zu verschwinden. Diese Frage wird im folgenden noch behandelt werden.

Bei Weglassung der einen Wand ergibt sich aus den Gl. (3) und (4) mit der Substitution

$$a' + y = z$$

direkt

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} A_k \Gamma e^{-n_k z} \cos n_k x \\ v' &= -\frac{1}{2} A_k \Gamma e^{-n_k z} \sin n_k x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5),$$

worin jetzt z den Anstand vom inneren Rand der Grenzschicht der verbliebenen Wand bedeutet. Man erkennt, daß die Zusatzgeschwindigkeiten mit wachsendem Abstand von der Grenzschicht logarithmisch abklingen.

Die Abb. 9a und 9b zeigen die Verhältnisse der Kernströmung zur Zeit $t = 0$ in zwei um die halbe Periode verschobenen Querschnitten. Um die Hauptströmung, die allen konstanten Anteilen der Zirkulation entspricht, lagert sich mit wechselndem Zeichen die Zusatz-

[10]) Schlömilch a. a. O.
[11]) R. v. Mises, Elemente der techn. Hydromechanik, I. Teil S. 71. Teubner 1914.

geschwindigkeit u'. Tritt die innere Reibung gegenüber der Grenzschichtwirkung zurück, so können auch sattelförmige Geschwindigkeitsbilder gemessen werden, wie sie z. B. Kozeny[12]) erwähnt.

Da die Schwankungen am inneren Rande der Grenzschicht angenommen wurden, läßt sich die Strömung in die Grenzschicht analytisch fortsetzen. Die Gl. (3) und (4) lauten hierfür entsprechend geändert:

$$\left.\begin{aligned} u'' &= A_k \Gamma \frac{1}{2}\left(-e^{-n_k(y-a')} + e^{-n_k(y+a')}\right)\cos n_k x \\ v'' &= A_k \Gamma \frac{1}{2}\left(e^{-n_k(y-a')} - e^{-n_k(y+a')}\right)\sin n_k x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Geht man im Grenzübergang von beiden Seiten an die Schicht $y = a'$ heran, so findet man jene periodisch schwankende Differenz $(u' - u'')$, die zur Erklärung der Schwankung der Zirkulation in dieser Schicht notwendig ist, und außerdem die vom Einfluß der gegenüberliegenden Grenzschicht herrührenden Zusatzgeschwindigkeiten. Die Schicht $y = a'$ macht die Bewegung mit und die Schwankungen müßten sogar ständig anwachsen, wenn nicht die gesamte schwingende Zusatzbewegung ständig mit Energieverlust verbunden wäre, der nur auf Kosten des Druckgefälles hereingebracht werden kann, welches außerdem noch den Reibungsverlust der Hauptströmung zu decken hat. Man kann daher an dem eingangs erwähnten Beharrungszustand festhalten, wenn man die Dissipation der Zusatzbewegung vermehrt um die Mischverluste gleich jenem Anteil des erfahrungsgemäß zeitlich unveränderlichen Druckgefälles setzt, der nach Abzug des Energiebedarfes der Hauptströmung verbleibt.

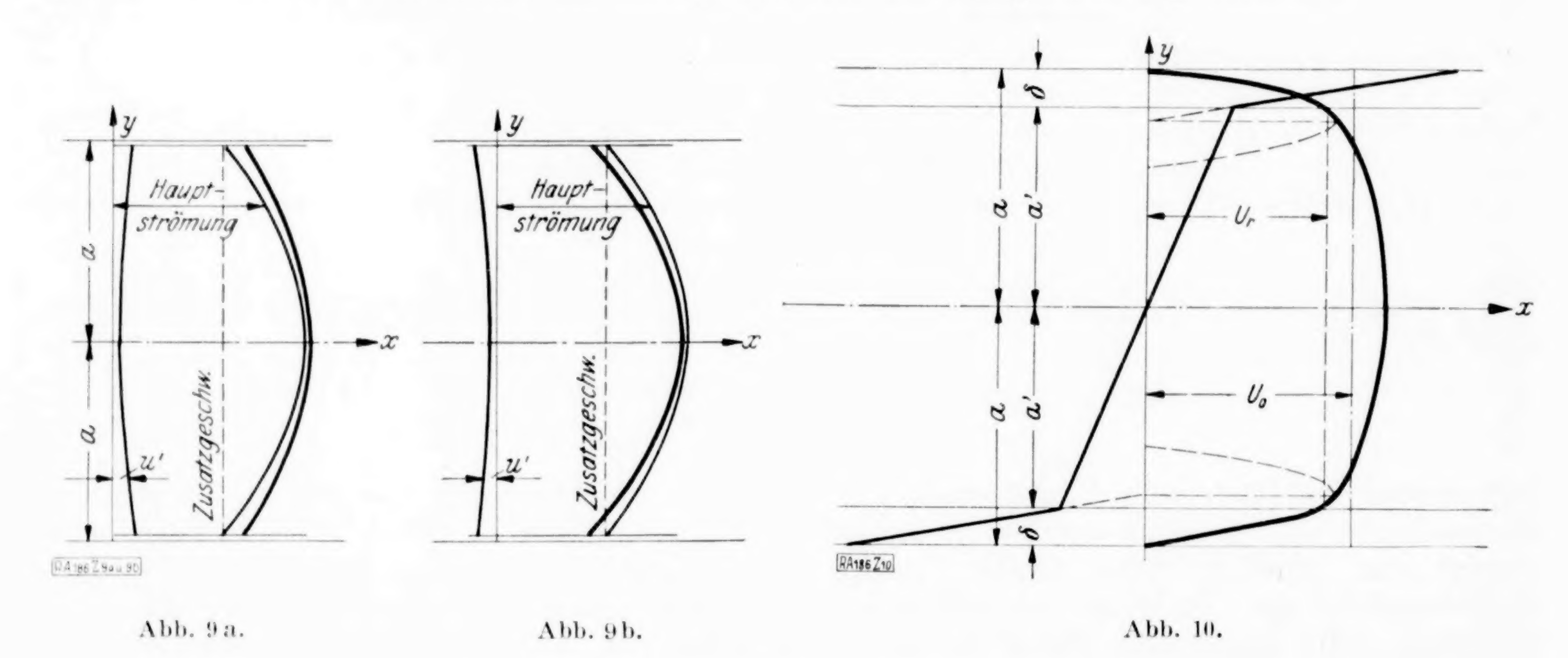


Abb. 9a. Abb. 9b. Abb. 10.

Nun haben die Gl. (6) aber noch den Mangel, daß sie u'' und v'' gegen die feste Wand zu nicht zum Verschwinden bringen. Diese Schwierigkeit läßt sich aber beseitigen, wenn man sich die Auffassung Prandtls[13]) zu eigen macht, nach der in der Nähe der Wand nur solche Flüssigkeitsballen an der Zusatzbewegung teilnehmen können, deren Durchmesser kleiner als der Wandabstand ist. Ein entsprechender Ansatz, der außerdem die Verhältnisse am Innenrand der Grenzschicht unverändert läßt, ist z. B., da $\frac{\pi}{n_k}$ proportinal diesem Durchmesser ist,

$$n_k'' = n_k \left(\frac{\delta}{a-y}\right)^m \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

worin $\delta = a - a'$ die Grenzschichtdicke und m einen zunächst beliebigen Exponenten bedeutet, den man in erster Annäherung etwa gleich $\frac{6}{7}$ oder 1 setzen kann[14]). Nun läßt sich die Bildung der Schwankungen auch folgendermaßen erklären: sie entstehen aus den geringfügigsten Ursachen an der Wand, breiten sich über die Grenzschicht aus, wobei mit abnehmendem n_k die Dämpfung kleiner wird[15]), und setzen sich am Innenrand der Grenzschicht

[12]) J. Kozeny, Über ausgebildete Turbulenz. Sitz.-Ber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, Math. naturw. Kl. Abt. IIa. 37. Bd. Heft 5 u. 6 1928.
[13]) L. Prandtl, Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. f. ang. M. u. M. Bd. 5. Heft 5.
[14]) Vgl. Fußnote 13.
[15]) Vgl. C. Schaefer, Einführung in die theor. Physik. S. 895. Walter de Gruyter & Co., Berlin-Leipzig 1922.

in einem schließlichen Beharrungszustand fest. Praktisch werden jedenfalls überhaupt nur jene der ursprünglich übereinander gelagerten Störungen bestehen bleiben, die die größte Wellenlänge haben. So wird es erklärlich, daß schon die Annahme einer einfachen cos-Funktion in Gl. (1) brauchbare Geschwindigkeitsbilder ergeben kann.

Für die folgende Überlegung, die sich hauptsächlich auf die Kernströmung bezieht, bedeuten:

U die veränderliche Geschwindigkeit der Hauptströmung,
U_0 ihren Mittelwert über den Querschnitt,
U_r die zugehörige Geschwindigkeit am Innenrand der Grenzschicht,

$$u' = A_k \Gamma e^{-n_k a'} \cdot \cos n_k [x - (U + u') t] \cdot \mathfrak{Cof}\, n_k y$$

$$v' = A_k \Gamma e^{-n_k a'} \cdot \sin n_k [x - (U + u') t] \cdot \mathfrak{Sin}\, n_k y$$

die Zusatzgeschwindigkeiten und endlich $u = U + u'$, $v = v'$ die Komponenten der Gesamtgeschwindigkeit.

Da Γ proportional $\frac{U_r}{\delta}$ bez. $\frac{U_0}{\delta}$ sein muß, kann für $A_k \Gamma = \lambda U_0$ geschrieben werden, wobei jetzt der Beiwert λ sowie nach früherem n_k mit δ von der auf den hydraulischen Radius bezogenen Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R}_a$ abhängt. Das Geschwindigkeitsbild der Hauptströmung setzt sich aus Parabeln zusammen, wie etwa die Abb. 10 zeigt. Die zugehörige Wirbelverteilung besteht aus drei Geraden und stimmt mit den aus den Versuchskurven Abb. 2 bis 7 vermittelten überein, abgesehen von den Abrundungen im Bereich des Innenrandes der Grenzschicht, die aber nach dem vorhergehenden durchaus verständlich sind. Dieses Geschwindigkeitsbild dürfte immer gemessen worden sein, weil man annehmen muß, daß die der Zusatzbewegung entsprechenden Vibrationen der Instrumente bei den Versuchen eliminiert wurden.

Boussinesq hat vorgeschlagen, den Impulsaustausch durch Einführung einer fiktiven Schubspannung

$$\tau = \varrho\, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

zu berücksichtigen, worin der Turbulenzkoeffizient ε seiner Dimension nach das Produkt aus einer Länge mal einer Geschwindigkeit sein muß. Prandtl bestätigt diesen Ansatz[16]. Setzt man $\varepsilon = 1 \cdot v'$, worin v' die Quergeschwindigkeit und 1 die Erstreckung der Strömung senkrecht zur $x - y$-Ebene bedeutet, so ist über diese Länge 1 x und y, somit also auch v' und $\frac{\partial u}{\partial y}$ örtlich konstant. Multipliziert man nun die Schubspannung mit $1 \cdot dx$ und integriert über die ganze Breite $2a'$ der Kernströmung und über die halbe Periode $\frac{\pi}{n_k}$, so ergibt sich für den Verlust an Druckenergie über die Länge $\frac{\pi}{n_k}$

$$\varrho \int_0^{\frac{\pi}{n_k}} \int_{-a'}^{+a'} v' \frac{\partial (U + u')}{\partial y}\, dx\, dy = U_0 (U_r - U_0) \cdot \frac{12 \lambda \varrho}{n_k^2 a'^2} \cdot e^{-n_k a'} \left(a' \mathfrak{Cof}\, n_k a' - \frac{1}{n_k} \mathfrak{Sin}\, n_k a' \right) \quad \ldots \quad (9).$$

Dieser Ausdruck ist quadratisch in U_0. Man findet ihn auch direkt aus den Navier-Stockesschen Gleichungen, ohne ihnen etwas hinzufügen zu müssen.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Setzt man $u = U + u'$, $v = v'$ und bildet die Ableitungen der rechten Seite, so vereinfacht sich die Gleichung; insbesondere wird

$$(U + u') \frac{\partial (U + u')}{\partial x} = (U + u') \frac{\partial u'}{\partial x}$$

negativ gleich

$$\frac{\partial (U + u')}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial t} = -(U + u') \cdot \frac{d u'}{d x},$$

[16]) Vgl. Fußnote 13.

woraus man den gewissermaßen quasistationären Zustand der Strömung erkennen kann. Man erhält

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\varkappa\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\varrho\cdot v'\frac{\partial (U+u')}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Da $\frac{\partial p}{\partial x}$ selbst veränderlich ist, hat man von dem Mittelwert zu bilden

$$\frac{2a'\pi}{n_k}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_m=-\frac{2a'\pi}{n_k}\cdot\varkappa\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\varrho\int\limits_0^{\frac{\pi}{n_k}}\int\limits_{-a'}^{+a'} v'\cdot\frac{\partial (U+u')}{\partial y}\,dx\,dy \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Das erste Glied rechts entspricht der reinen Laminarströmung, das zweite den Impulsaustausch nach Gl. (9).

Da die gesamte Zusatzbewegung im Beharrungszustand, also ungedämpft angenommen wurde, muß man noch den Anteil der Dissipation

$$E=\varkappa\int\limits_0^{\frac{\pi}{n_k}}\int\limits_{-a'}^{+a'}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

$$=\varkappa\int\limits_0^{\frac{\pi}{n_k}}\int\limits_{-a'}^{+a'}2\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\frac{\varkappa}{2}\cdot\pi\cdot e^{-2n_k a'}\lambda^2 U_0^2\,\mathfrak{Sin}\,2\,n_k\,a'$$

der Zusatzbewegung hinzufügen. Damit ist aber auch die Integration über die Länge L möglich, die sich immer als ganzes Vielfaches von $\frac{\pi}{n_k}$ darstellen läßt. Eine ähnliche Rechnung wäre noch für die Grenzschicht anzustellen.

Die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen infolge der Zusatzbewegung relativ zur Hauptströmung sind nahezu geschlossen, was man auch aus den Aufnahmen von Nikuradse[17]) trotz der Störung durch die Oberflächenspannung ganz gut entnehmen kann.

Infolge der starken Dämpfung in ihr bleibt die Strömung in der Grenzschicht fast laminar, so daß die Annahme einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung berechtigt erscheint. U^7 bleibt dabei, in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Werten von Nikuradse[18]). Mit abnehmender Reynoldsscher Zahl wird die Grenzschicht immer dicker und die Schwankungen an ihrer Oberfläche, die gegen die Mitte zu abnehmen, beeinflussen sich immer mehr gegenseitig. Für die Laminarströmung haben sich dann die Verhältnisse in der Grenzschicht auf die ganze Strömung ausgebreitet, und die Störungen verschwinden in der Mitte durch Interferenz. Demnach stellt sich die laminare Strömung einfach den Grenzfall der allgemeineren turbulenten dar. Es läßt sich ganz elementar zeigen, daß bei der Laminarströmung sozusagen die ganze Strömung Grenzschicht ist. Beispielsweise gilt für zyl. Rohre

$$\frac{\Delta p}{L}=\lambda\,\varrho\,\frac{U_0^2}{2\,D} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

für die turbulente Strömung

$$U=\frac{\Delta p}{4\,\varkappa\,L}(r^2-y^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

für die laminare Grenzschicht. Bezeichnet U_r wieder die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht, so wird an der Stelle $y=r-\delta$

$$U_r=\frac{\Delta p}{4\,\varkappa\,L}(r^2-r^2+2\,r\,\delta-\delta^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14a),$$

[17]) Vgl. Fußnote 1.

[18]) Kozeny a. a. O. Fig. 6.

Eliminiert man nun aus den Gl. (13) und (14) das Druckgefälle, so ergibt sich

$$\delta (D-\delta) = \frac{8 D^2}{\lambda} \cdot \frac{U_r}{U_0} \cdot \frac{1}{\Re_D} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

worin $\Re_D$ die auf den Durchmesser bezogene Reynoldssche Zahl ist. Vernachlässigt man in Gl. (15) δ als klein gegenüber D, so ergibt sich die Gleichung von Kozeny[19])

$$\frac{\delta}{D} = \frac{8}{\lambda} \cdot \frac{U_r}{U_0} \cdot \frac{1}{\Re_D}.$$

Diese Vernachlässigung macht aber den Übergang zur Laminarströmung unmöglich, für welche nach obiger Überlegung δ keinesfalls mehr klein ist. Aus Gl. (15) ergibt sich

$$\delta = \frac{D}{2} \overset{(+)}{-} \sqrt{\frac{D^2}{4}\left(1 - \frac{32}{\lambda} \cdot \frac{U_r}{U_0} \cdot \frac{1}{\Re_D}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Für den Übergang zur Laminarströmung erhält man durch Gleichsetzen der Druckgefälle

$$\lambda \varrho \cdot \frac{U_0{}^2}{2 D} = \frac{8 \varkappa}{r^2} \cdot U_0 = \frac{32 \varkappa}{D^2} \cdot U_0; \qquad \lambda = \frac{64}{\Re_D}\,^{20)},$$

und mit

$$U_r = U_{\max} = 2\, U_0$$

$$\delta = \frac{D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4}\left(1 - \frac{64}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{64}\right)} = \frac{D}{2}.$$

Allgemein ist

$$\delta = \frac{D}{2} - \frac{D}{2} \sqrt{1 - \frac{\Re_{D\,k}}{2 \Re_D} \cdot \frac{U_r}{U_0}}.$$

Ganz analog ergibt sich für die Strömung zwischen parallelen Platten im Abstand 2a

$$\delta (2a - \delta) = \frac{4 a^2}{\lambda} \cdot \frac{U_r}{U_0} \cdot \frac{1}{\Re_a},$$

wenn $\Re_a$ auf den hydraulischen Radius bezogen ist. Ferner wird

$$\delta = a - a \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{U_r}{U_0} \cdot \frac{1}{\Re_a}}.$$

Für den Übergang erhält man wieder

$$\lambda \cdot \frac{\varrho\, U_0{}^2}{2 a} = \frac{3 \varkappa}{a^2} \cdot U_0; \qquad \lambda = \frac{6}{\Re_a}$$

und

$$U_r = U_{\max} = \frac{3}{2}\, U_0.$$

Also wird

$$\delta = a - a \sqrt{\left(1 - \frac{4}{6} \Re_a \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{\Re_a}\right)} = a.$$

Die Grenzschicht wird aber erst in der Anlaufperiode gebildet. Die Wirbelbildung beginnt an der Wand und breitet sich gegen die Mitte über jene Grenzschichtdicke aus, die der Reynoldsschen Zahl der endgültigen Strömung entspricht. Somit muß die Anlauflänge bei der Laminarströmung am größten sein und mit wachsender Reynoldsscher Zahl abnehmen. Dies ist tatsächlich beobachtet worden[21]).

Die Schwankungen in der Grenzschicht wurden mit Gl. (1) als allgemeine periodische Funktion eingeführt und bieten für eine Annahme noch große Freiheit. Um diese Allgemeinheit nicht einzuschränken wurde die Rechnung für ein Glied der Fourierschen Reihe durchgeführt und die Summierung in den Gl. (9) und (12) über die halbe Periode erstreckt. Man wird natürlich von diesem Integrationsintervall unabhängig, wenn man mit Gl. (1) eine Reihe einführt, deren Mittelwert über die ganze Periode von 0 verschieden ist. 186

[19]) Kozeny a. a. O.
[20]) L. Hopf, Zähe Flüssigkeiten. Handb. der Phys. Bd. VII. S. 140. Berlin, Springer 1927.
[21]) Hopf, Handb. der Phys. Band VII, S. 141.

Verhalten von Wirbelsystemen.

Von *A. Betz* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Durch konsequente Anwendung des Kutta-Joukowskyschen Satzes über den Zusammenhang zwischen Tragflügelauftrieb und Zirkulation lassen sich eine Reihe von Sätzen über das Verhalten von Wirbelsystemen ableiten. Die Anwendung dieser Gedankengänge auf einige Probleme der Tragflügeltheorie gibt Einblick in manche bisher noch wenig beachtete Zusammenhänge.

Es sollen nur ebene Strömungsvorgänge behandelt werden. Alle Wirbelfäden sind demnach gerade und einander parallel (senkrecht zur Strömungsebene).

I. Allgemeine Sätze.

1. Der Kutta-Joukowskysche Satz. Wenn ein Körper, um den das Linienintegral der Strömung von Null verschieden ist, der also eine Zirkulation Γ besitzt, sich relativ zu dieser Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v bewegt, so erfährt er eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung, die auf die Längeneinheit bezogen

$$P = \varrho\, v\, \Gamma \quad \ldots \quad (1)$$

ist (Kutta-Joukowskyscher Satz, Abb. 1). Wenn die Flüssigkeit außer der Zirkulationsströmung keine Bewegung ausführt, so ist v die Geschwindigkeit relativ zur Flüssigkeit im Unendlichen. Wenn aber die Flüssigkeit außer der Zirkulationsströmung noch andere Bewegungen ausführt, wenn z. B. mehrere Wirbel, oder auch Quellen und Senken vorhanden sind, so ist nicht ohne weiteres klar, was man als Relativgeschwindigkeit ansehen soll. Es ist nun bekannt, daß für v die Geschwindigkeit des Körpers relativ zu jener Strömung zu nehmen ist, welche an der Stelle des Körpers bei Abwesenheit desselben herrschen würde. Wir wollen dabei den Körper als unendlich klein voraussetzen, da sonst an verschiedenen Stellen des Körpers verschiedene Geschwindigkeiten herrschen können. (Dieser Fall kann durch Integration aus unendlich kleinen Körpern aufgebaut werden.) Diese schärfere Formulierung des Kutta-Joukowskyschen Satzes kann man ohne weiteres einsehen, wenn man weiß, daß ein freier Wirbel, auf den keine Kraft wirken kann, sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, welche die Strömung an der Stelle des Wirbels bei Abwesenheit des Wirbels haben würde. Der Kutta-Joukowskysche Satz muß demnach für die Bewegung mit dieser Geschwindigkeit die Kraft Null ergeben, d. h. die im Kutta-Joukowskyschen Satz auftretende Geschwindigkeit muß relativ zu dieser Bewegung gemessen werden. Man kann dies aber auch durch eine geeignete Ableitung des Kutta-Joukowskyschen Satzes unmittelbar zeigen. In der Regel wird dieser Satz in der Weise abgeleitet, daß man in einem Koordinatensystem, in welchem der Körper ruht (stationäre Bewegung), die Drücke berechnet, welche infolge der Überlagerung von Zirkulationsströmung und Translationsströmung auf eine den Körper umschließende Kontrollfläche wirken und die Impulse, welche durch sie ein- und austreten. Wenn man nun als Kontrollfläche einen den Körper so eng umschließenden Zylinder wählt, daß die Translationsgeschwindigkeit im ganzen Gebiet der Kontrollfläche als konstant angesehen werden kann, so geht in den Kutta-Joukowskyschen Satz als Geschwindigkeit v eben diese Translationsgeschwindigkeit in der Umgebung des Körpers ein, das ist aber die Geschwindigkeit, die an dieser Stelle bei Abwesenheit des Körpers herrschen würde.

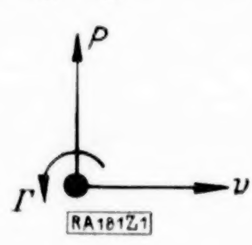


Abb. 1. Kutta-Joukowskyscher Satz.

2. Der Schwerpunkt endlicher Wirbelgebiete. Haben wir eine Anzahl von Wirbeln in einer Flüssigkeit, so befindet sich jeder einzelne in einer Strömung, welche als Feld aller übrigen Wirbel durch deren Größe und Anordnung bestimmt ist, und jeder Wirbel bewegt sich mit dieser Strömung. Denken wir uns nun an Stelle der Wirbel einzelne feste Körper mit der gleichen Zirkulation wie die Wirbel (etwa rotierende Zylinder), so ist auch die Strömung die gleiche. Hindern wir diese Körper an ihrer Bewegung mit der Strömung, halten wir sie also an ihrem Orte fest, ohne dabei ihre Zirkulation zu ändern, so erfährt jeder Zylinder entsprechend dem Kutta-Joukowskyschen Satz eine Kraft und wir müssen, um ihn festzuhalten, eine entgegengesetzte Kraft auf ihn ausüben. Für einen Körper mit der Zirkulation Γ_n, der sich an einer Stelle mit der Geschwindigkeit v_n befindet, ist diese Kraft

$$P_n = \varrho\, v_n\, \Gamma_n \quad \ldots \quad (2)$$

und steht senkrecht zu v_n. Die Resultierende aus Kräften, die wir auf die Zylinder ausüben,

muß an den Grenzen der Flüssigkeit von den Wänden aufgenommen werden, d. h. sie muß gleich sein der Resultierenden aus den Drücken der Flüssigkeit auf die begrenzende Wand[1]).

Ist nun die Flüssigkeit sehr ausgedehnt, so daß die starr und ruhend angenommenen Grenzen derselben überall sehr weit von den Wirbeln bzw. Körpern mit Zirkulation entfernt sind, so geht bei fest gehaltenen Wirbeln die Resultierende aus den Drücken auf die Begrenzungswände gegen Null. Die von den Wirbeln herrührenden Störungsgeschwindigkeiten v nehmen nämlich umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung ab, die damit zusammenhängenden Druckdifferenzen (Bernoullische Gleichung $p - p_0 = -\frac{\varrho}{2} v^2$) umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung; die Oberfläche der Begrenzung nimmt linear mit der Entfernung zu, so daß sich für die Kraft, die als Produkt aus Druckdifferenz und Fläche entsteht, eine Abnahme umgekehrt proportional der Entfernung ergibt. Wenn aber diese Kraft auf die Begrenzungswände verschwindet, so muß auch die resultierende Kraft auf unsere Körper verschwinden, d. h. es muß sein

$$\sum_n P_n = \varrho \sum_n v_n \Gamma_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Da die Kräfte P_n bzw. die Geschwindigkeiten v_n beliebige Richtungen haben können, so ist unter Σ eine vektorielle Addition der Kräfte bzw. Geschwindigkeiten zu verstehen. Wir können statt dessen auch die Komponenten in der X- und Y-Richtung gesondert addieren und erhalten

$$\sum_n P_{nx} = \varrho \sum_n v_{ny} \Gamma_n = 0, \qquad \sum_n P_{ny} = \varrho \sum_n v_{nx} \Gamma_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3\text{a}) \text{ u. } (3\text{b}),$$

wobei die Zeiger x und y die Komponenten in der X- bzw. Y-Richtung der betreffenden Vektoren bezeichnen. Lassen wir die Körper frei, wobei wir sie wieder durch gewöhnliche Wirbel ersetzen können, so bewegen sie sich mit den Geschwindigkeiten v_n, und unsere vorstehenden Gleichungen bilden eine allgemeine Aussage über die Verschiebung der Wirbel in einer Flüssigkeit ohne äußere Kräfte, insbesondere in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. Zur anschaulichen Formulierung dieser Aussage denken wir uns an Stelle der Wirbel Massenpunkte, deren Massen proportional den Wirbelstärken sind. Dabei müssen wir allerdings auch negative Massen zulassen, indem die Wirbel mit einem Drehsinn positiven Massen und die mit entgegengesetztem Drehsinn negativen Massen entsprechen. Wir können dann von einem Schwerpunkt des Wirbelsystemes sprechen, indem wir den Schwerpunkt des entsprechenden Massensystemes meinen. Unter Anwendung dieses Begriffes können wir die gefundene Aussage über die Wirbelbewegung folgendermaßen ausdrücken (Satz 1).

In einer Flüssigkeit, auf welche keine äußeren Kräfte wirken können (unendlich ausgedehnte Flüssigkeit), bewegen sich die Wirbel so, daß ihr Schwerpunkt relativ zu den starren Flüssigkeitsgrenzen bzw. relativ zu der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit unverändert bleibt[2]).

Vorausgesetzt ist hierbei natürlich auch, daß außer den betrachteten Wirbeln keine weiteren singulären Stellen in der Flüssigkeit vorhanden sind.

Ist die Flüssigkeit durch starre Wände begrenzt und läßt sich über die resultierende Kraft auf die Begrenzungswände bei festgehaltenen Wirbeln (stationäre Strömung) eine Aussage machen, so ist damit auf Grund der Gl. (2) eine Aussage über die Bewegung des Wirbelschwerpunktes gegeben. Ist die resultierende Kraft auf die Wände P, so muß

$$\varrho \sum v_n \Gamma_n = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sein. Bezeichnen wir die Schwerpunktsgeschwindigkeit relativ zu den starren Wänden mit v_0, so ist

$$\varrho v_0 \sum \Gamma_n = \varrho \sum v_n \Gamma_n = P.$$

---

[1]) Durch das Festhalten der Wirbel wird die Strömung stationär (vorausgesetzt, daß außer diesen Wirbeln keine weiteren Singularitäten vorhanden und die Begrenzungswände starr und ruhend sind). Man kann daher für die Berechnung der Drücke die einfache Bernoullische Gleichung $p + \frac{\varrho}{2} v^2 = \text{konst}$ anwenden. Bei freien Wirbeln ist die Form der Strömung in einem bestimmten Zeitpunkt identisch wie bei festgehaltenen Wirbeln, aber sie ist im allgemeinen nicht mehr stationär, da die Wirbel ja wandern, also ihre räumliche Anordnung ändern. Damit ändern sich aber die Drücke, da bei nicht stationärer Bewegung die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung $p + \frac{\varrho}{2} v^2 + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{konst}$ gilt (Φ = Strömungspotential, bei stationärer Bewegung ist $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$). Bei freien Wirbeln wird auf die Wirbel keine Kraft ausgeübt wie bei festgehaltenen, deshalb muß im seitlichen Durchschnitt auch die resultierende Kraft auf die Begrenzungswände verschwinden. Dies wird durch die Beschleunigungsdrücke $\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ gerade erreicht. Für die hier und im folgenden benützten äußeren Kräfte auf die Flüssigkeitsgrenzen sind daher nicht die bei freien Wirbeln auftretenden Drücke maßgebend, sondern jene Drücke, welche beim Festhalten der Wirbel, also bei stationärer Strömung auftreten würden.

[2]) Diesen Satz hat bereits Helmholtz in seiner bekannten Arbeit „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen" (Journal f. d. reine und angew. Math. 55, S. 25 bis 55, 18) auf andere Weise abgeleitet.

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist also

$$v_0 = \frac{P}{\varrho \Sigma \Gamma_n} \quad \quad (5)$$

und senkrecht zur Kraft P gerichtet. Wir erhalten daher den Satz 2:

Wenn bei festgehaltenen Wirbeln (stationäre Strömung), die von der Flüssigkeit auf die Begrenzungswände ausgeübten Drücke eine resultierende Kraft ergeben, so bewegt sich der Schwerpunkt der freien Wirbel so, wie sich nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz ein dort befindlicher Flügel, dessen Zirkulation gleich der Summe der Zirkulationen der Wirbel ist, in ruhender unendlich ausgedehnter Flüssigkeit bewegen müßte, damit sein Auftrieb gleich dieser resultierenden Kraft ist.

Im allgemeinen werden die Drücke auf die Begrenzungswände und damit ihre resultierende Kraft nicht ohne weiteres bekannt sein. In manchen Fällen lassen sich aber wenigstens gewisse Aussagen leicht machen. Ist z. B. die Flüssigkeit einseitig durch eine ebene Wand begrenzt oder zwischen zwei parallele Wände eingeschlossen, so kann die aus den Drücken auf die Begrenzungswände resultierende Kraft nur senkrecht zu diesen Begrenzungswänden stehen. Da der Schwerpunkt der Wirbel sich senkrecht zu dieser Kraft bewegt, so erhalten wir den Satz 3:

Befinden sich Wirbel zwischen zwei ebenen parallelen Wänden, oder neben einer einzelnen ebenen Begrenzungswand, so bleibt der Abstand des Wirbelschwerpunktes von diesen Wänden unverändert (er bewegt sich parallel zu den Wänden)[3]).

3. Trägheitsmoment endlicher Wirbelgebiete. Wir denken uns die Wirbel in einer Flüssigkeit wieder festgehalten und zerlegen an jedem Wirbel die Geschwindigkeiten in eine radial nach dem Schwerpunkt oder von ihm weg gerichtete Komponente und eine dazu senkrechte. Ist r der Abstand eines Wirbels mit der Zirkulation Γ vom Schwerpunkt und v_r die radial (nach außen) gerichtete Geschwindigkeitskomponente, so erfährt dieser Wirbel eine Kraft

$$T = \varrho \Gamma v_r,$$

welche senkrecht zu r steht und daher bezogen auf den Schwerpunkt ein Moment $T \cdot r$ bildet. Die tangentiale (senkrecht zu r gerichtete) Geschwindigkeitskomponente v_t ergibt eine Kraft in Richtung von r, welche kein Moment um den Schwerpunkt erzeugt. Die Gesamtheit der auf die Wirbel ausgeübten Kräfte kann in eine durch den Schwerpunkt gehende Resultierende (aus den von v_t herrührenden radialen Kraftkomponenten) und ein Moment

$$M = \varrho \Sigma \Gamma v_r r$$

zerlegt werden. Diese müssen gleich und entgegengesetzt den auf die Flüssigkeitsgrenzen wirkenden Kräften und Momenten sein. Lassen wir die Wirbel frei, so bewegt sich der Schwerpunkt entsprechend der Einzelkraft nach den bereits abgeleiteten Gesetzen. Außerdem bewegen sich die Wirbel in radialer Richtung mit den Geschwindigkeiten v_r. Da

$$v_r = \frac{\partial r}{\partial t}$$

ist, erhalten wir

$$\varrho \Sigma \Gamma r \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\varrho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \Gamma r^2 = M \quad \quad (6),$$

wobei M das Moment der äußeren Kräfte, bei festgehaltenen Wirbeln bezogen auf den Schwerpunkt, ist. Ist dieses Null[4]), so erhalten wir

$$\Sigma \Gamma r^2 = \text{const} \quad \quad (7).$$

$\Sigma \Gamma r^2$ ist eine Größe, die dem polaren Massenträgheitsmoment $\Sigma m r^2$ bezogen auf den Schwerpunkt entspricht. Wir können sie als Trägheitsmoment des Wirbelsystemes bezeichnen und erhalten den Satz 4.

[3]) Für eine geringe Anzahl von Wirbeln ist dieses Ergebnis bereits von W. Müller durch numerische Berechnung der Wirbelbahnen gefunden worden (Vortrag in der Sitzung der Ortsgruppe Göttingen der Ges. f. angew. Math. u. Mech. 1928 und auf der Physikertagung in Prag 1929).

[4]) Ob in einem gegebenen Falle ein äußeres Moment herrscht oder nicht, bedarf einer sorgfältigeren Untersuchung als die Frage nach äußeren Kräften, da z. B. bei Vergrößerung der Grenzflächen zwar die Kräfte mit $1/r$ gegen Null abnehmen, aber die Momente endlich bleiben können, indem bei ihnen der Faktor r als Hebelarm hinzutritt.

Wenn bei festgehaltenen Wirbeln die äußeren auf eine Flüssigkeit wirkenden Kräfte kein Moment, bezogen auf den Schwerpunkt des in dieser Flüssigkeit befindlichen Wirbelsystems, haben, so bleibt das Trägheitsmoment dieses Wirbelsystems konstant.

Wir hätten bei unserer Überlegung an Stelle des Schwerpunktes auch einen beliebigen anderen Punkt als Momentenpunkt wählen können. Das Ergebnis wäre aber bei Berücksichtigung des Gesetzes der Schwerpunktsverschiebung das gleiche gewesen.

Ist das Moment der äußeren Kräfte gleichsinnig mit der als positiv gewählten Drehrichtung der Wirbel, so wächst das Trägheitsmoment gemäß Gl. (6), ist es ungleichsinnig, so nimmt das Trägheitsmoment ab.

4. Wirbelsysteme, deren Gesamtzirkulation Null ist. Die kinetische Energie eines Potentialwirbels in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit in einem Kreisring zwischen r und dr und der Schichtdicke 1 ist $\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\Gamma}{2 r \pi}\right)^2 2 r \pi \, dr = \frac{\varrho}{2} \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{dr}{r}$. Bei der Integration über die ganze Flüssigkeit (von $r=0$ bis $r=\infty$) ergibt sich sowohl bei Annäherung an $r=0$ wie an $r=\infty$ für die Energie ∞. Solche Wirbel sind deshalb physikalisch nicht zu verwirklichen. Die Schwierigkeit bei $r=0$ erledigt sich dadurch, daß die physikalischen Wirbel stets einen Kern von endlichem Durchmesser haben, in dem die Geschwindigkeit nicht mehr mit $\frac{1}{r}$ gegen ∞ zunimmt, sondern endlich bleibt. Die Schwierigkeit bei $r=\infty$ bleibt aber bestehen (außer der Energie ist auch der Drehimpuls ∞). Man kann deshalb in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit Wirbel immer nur paarweise erzeugen, so daß die Summe der Zikulationen Null ist. Das Geschwindigkeitsfeld eines solchen Wirbelpaares nimmt in großer Entfernung umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung ab, so daß die Energie auch bei beliebiger Ausdehnung der Flüssigkeit endlich bleibt. Deshalb besteht der Satz 5:

In einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ist die Gesamtzirkulation aller Wirbel Null.

Wirbelsysteme mit endlicher Gesamtzirkulation können nur in endlich begrenzten Flüssigkeiten vorkommen. Natürlich kann auch in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ein Teil der Wirbel in so großer Entfernung sein, daß sie für die Strömung an der betrachteten Stelle belanglos sind. Dann können sich dort Wirbelsysteme mit einseitiger Gesamtzirkulation befinden, indem eben die die Gesamtzirkulation zu Null ergänzenden Wirbel sehr weit entfernt sind. Da aber Energie und Impuls zweier entgegengesetzter Wirbel mit zunehmender Entfernung wachsen, so kommen sehr große Entfernungen nur in Fällen sehr großer Energiezufuhr vor. Der Fall, daß man Wirbelsysteme mit der Gesamtzirkulation Null hat, ist deshalb verhältnismäßig häufig und bedarf einer besonderen Betrachtung, da der Schwerpunkt eines solchen Systemes ja im Unendlichen liegt, so daß sich die vorhergehenden Sätze z. T. nicht ohne weiteres anwenden lassen.

Fassen wir einen Teil der Wirbel zu einer Gruppe zusammen und die übrigen zu einer zweiten Gruppe, so können wir jede Gruppe für sich betrachten. Wir können uns der besseren Anschauung wegen vorstellen, daß die eine Gruppe die rechtsdrehenden, die andere die linksdrehenden Wirbel enthält, nötig ist dies aber nicht. Voraussetzung ist nur, daß die Gesamtzirkulation der einen Gruppe gleich und entgegengesetzt der der anderen Gruppe und von Null verschieden ist.

Wenn auf die Flüssigkeit keine äußeren Kräfte und Momente[5]) wirken, also z. B. bei unendlich ausgedehnter Flüssigkeit, müssen die Kräfte und Momente auf die festgehaltenen Wirbel Null sein, d. h. die resultierende Kraft auf die eine Gruppe muß gleich und entgegengesetzt der Kraft auf die andere sein und mit ihr auf einer Linie liegen. Diese Kräfte brauchen aber nicht notwendig durch den Schwerpunkt jeder der beiden Gruppen zu gehen. Lassen wir die Wirbel frei, so bewegt sich demnach der Schwerpunkt jeder der beiden Gruppen senkrecht zu dieser gegenseitigen Kraft und mit gleicher Geschwindigkeit. Wir können dies durch den Satz 6 ausdrücken.

Die Schwerpunkte von zwei Wirbelgruppen mit entgegengesetzt gleicher Gesamtzirkulation bewegen sich parallel zueinander mit gleicher Geschwindigkeit, behalten also auch konstanten Abstand.

Da wir zunächst über die Richtung der gegenseitigen Kraft nichts wissen, können wir auch über die Richtung der Bewegung nichts aussagen. Wenn die gegenseitige Kraft durch den Schwerpunkt einer Gruppe geht, so ist diese Gruppe frei von äußeren Momenten. Ihr

---

[5]) Bei Wirbelsystemen mit der Gesamtzirkulation Null werden auch die Momente beim Hinausrücken der starren Begrenzungswände ohne weiteres beliebig klein (vgl. Fußn. 4 S. 166).

Trägheitsmoment ist dann konstant (Satz 4)[6]. Im allgemeinen wird die gegenseitige Kraft nicht genau durch die Schwerpunkte der beiden Gruppen gehen. Wenn aber die beiden Gruppen räumlich einigermaßen getrennt und in sich abgeschlossen sind, so liegt die Kraft fast immer sehr nahe am Schwerpunkt, und man kann wenigstens näherungsweise die Trägheitsmomente als unveränderlich ansehen.

Geht die Kraft nicht durch die Schwerpunkte der beiden Gruppen, so ändert sich deren Trägheitsmoment. Ist die Kraft aber parallel zur Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte (S_1 S_2 Abb. 2), was sich darin äußert, daß die Schwerpunkte senkrecht zu ihrer Verbindungslinie wandern, so ist das Moment der Kraft, bezogen auf die beiden Schwerpunkte, entgegengesetzt gleich. Infolgedessen wächst das Trägheitsmoment der einen Gruppe um ebensoviel, wie das Trägheitsmoment der anderen Gruppe abnimmt. (Das eine Trägheitsmoment ist im allgemeinen positiv, das andere negativ. Die Absolutwerte der Trägheitsmomente nehmen dann gleich viel zu oder ab.) Wir können dies in dem folgenden Satz 7 zusammenfassen.

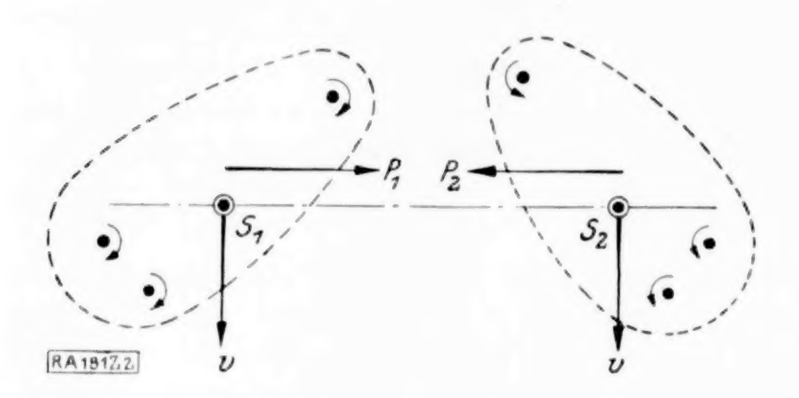


Abb. 2. Zwei Wirbelgruppen, deren Schwerpunkte sich senkrecht zu ihrer Verbindungslinie bewegen.

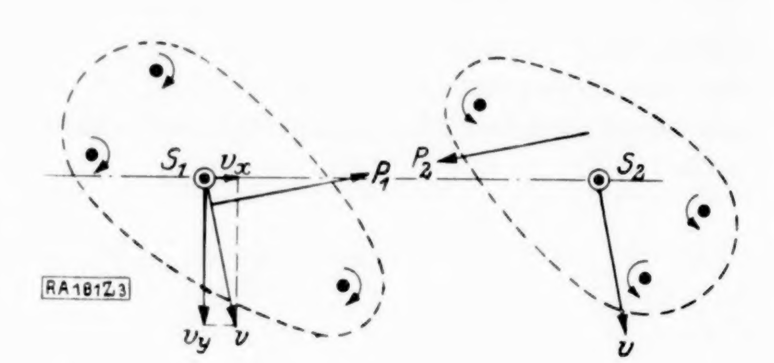


Abb. 3. Zwei Wirbelgruppen, deren Schwerpunkte sich schräg zu ihrer Verbindungslinie bewegen.

Bewegen sich in einer unendlich ausgedehnten, im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit die Schwerpunkte zweier Wirbelgruppen entgegengesetzt gleicher Gesamtzirkulation senkrecht zur Verbindungslinie der Schwerpunkte, so bleibt die algebraische Summe der Trägheitsmomente der beiden Gruppen unverändert.

Bildet die Kraft mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte (S_1 S_2 Abb. 3) einen Winkel, d. h. haben die Schwerpunkte eine Geschwindigkeitskomponente v_x in Richtung ihrer Verbindungslinie, so wächst das Trägheitsmoment der einen Gruppe mehr als das der anderen abnimmt oder umgekehrt. Auf jeden Fall ändert sich die Summe der Trägheitsmomente der beiden Gruppen. Und zwar ergibt sich für diese Änderung auf Grund der Gl. (6) und der Abb. 3

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma r_1^2 \Gamma_1 + \Sigma r_2^2 \Gamma_2) = 2 v_x a \Sigma \Gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

$\Sigma r_1^2 \Gamma_1$ bedeutet dabei das Trägheitsmoment der einen Gruppe, $\Sigma r_2^2 \Gamma_2$ das der anderen, a ist der Abstand der beiden Schwerpunkte, $\Sigma \Gamma$ stellt die Gesamtzirkulation einer Gruppe dar. Die Summe der Trägheitsmomente wächst, wenn die Bewegung der Schwerpunkte in Richtung von der Gruppe mit positiver Zirkulation nach der Gruppe mit negativer Zirkulation hin erfolgt. Bei umgekehrter Bewegung nimmt sie ab. In Gl. (8) ist demnach mit Rücksicht auf das Vorzeichen unter $\Sigma \Gamma$ die Gesamtzirkulation jener Gruppe zu verstehen, welche sich nach der anderen hin bewegt.

II. Anwendungen.

Bei der praktischen Anwendung dieser Sätze hat man es häufig nicht mit einer Anzahl von Einzelwirbeln, sondern mit kontinuierlich verteilten Wirbeln zu tun. Darin liegt aber keine Schwierigkeit; es treten einfach $\int$-Ausdrücke an Stelle der Σ-Ausdrücke. Etwas unangenehmer ist es, wenn sich die Wirbelsysteme in das Unendliche ausdehnen und dabei vielfach selbst unendlich große Zirkulation aufweisen. Aber auch hierfür lassen sich bei einiger Vorsicht die vorstehenden Sätze meist anwenden.

[6] Wir haben zwar bei den früheren Überlegungen und so auch bei Ableitung des Satzes 4 immer vorausgesetzt, daß außer dem betrachteten Wirbelsystem keine weiteren Singularitäten, also auch keine weiteren Wirbel vorhanden sind. Wenn wir jetzt zwei Gruppen von Wirbeln haben und jede für sich betrachten, so trifft diese Voraussetzung nicht mehr zu. Wir können aber alle früheren Überlegungen in der Weise verallgemeinern, daß wir die Kräfte, die zum Festhalten der nicht zur gerade betrachteten Gruppe gehörigen Wirbel nötig sind, als äußere auf die Flüssigkeit wirkende Kräfte auffassen. Man überzeugt sich so leicht, daß der Satz 4 in diesem Sinne auch auf eine Gruppe von Wirbeln bei Anwesenheit weiterer Wirbel anwendbar ist.

1. Wirbelsystem hinter einem Tragflügel. Wie die Tragflügeltheorie lehrt[7]), bildet sich hinter einem Tragflügel bei günstigster Auftriebsverteilung (geringster Widerstand bei gegebenem Auftrieb) eine Unstetigkeitsfläche, welche an jeder Stelle die gleiche Abwärtsgeschwindigkeit besitzt. Man kann sich deshalb die Strömung hinter einem Tragflügel so vorstellen, wie wenn sich da eine starre Platte, die Unstetigkeitsfläche, mit konstanter Geschwindigkeit nach unten verschiebt und die Flüssigkeit dabei in Bewegung setzt (Abb. 4). Diese Vorstellung ist aber nur in erster Näherung zutreffend, wenn die Störungsgeschwindigkeiten (wozu vor allem die Verschiebegeschwindigkeit w gehört) klein sind gegen die Fluggeschwindigkeit. Diese Bewegung wäre nämlich auf die Dauer nur möglich, wenn die Un-

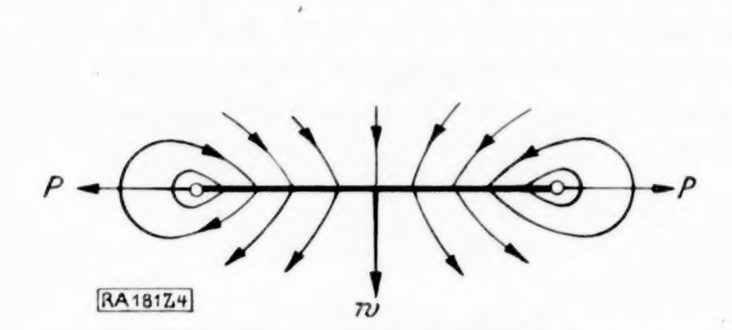


Abb. 4. Verschiebung einer starren Fläche in einer Flüssigkeit.

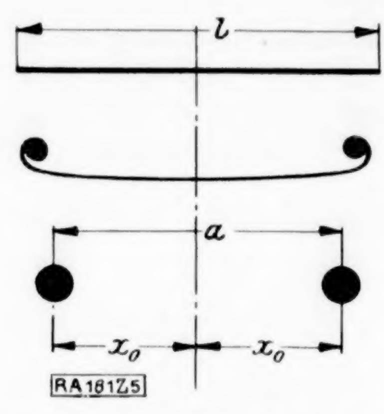


Abb. 5. Aufwicklung der Unstetigkeitsfläche hinter einem Flügel.

stetigkeitsfläche tatsächlich starr wäre. Beim Umströmen der Kanten treten seitlich gerichtete Saugkräfte P auf die Plattenkanten auf, welche nur von einer starren Platte aufgenommen werden können. Bei einer unstarren Unstetigkeitsfläche fallen diese Kräfte fort; die Unstetigkeitsfläche führt infolge dieses Wegfalles der Saugkräfte andere Bewegungen aus, sie wickelt sich von den Rändern ausgehend auf und geht allmählich in zwei getrennte Einzelwirbel über (Abb. 5).

Ist die Spannweite des Flügels l, so ist nach bekannten Sätzen der Tragflügeltheorie[8]) die Zirkulation je Längeneinheit $\frac{d\Gamma}{dx}$ für eine solche Unstetigkeitsfläche nach folgender Gleichung über die Spannweite verteilt

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \Gamma_0 \left(\frac{2}{l}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{1-(2x/l)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9),$$

wobei Γ_0 die Zirkulation um den Tragflügel in der Symmetrieebene (Mitte) desselben bedeutet. Die Abwärtsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche vor ihrer Aufwicklung ist

$$w = \frac{\Gamma_0}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Wir können die Unstetigkeitsfläche als ein kontinuierlich verteiltes System von Wirbeln mit der Gesamtzirkulation Null auffassen. Die Verteilung der Wirbel ist durch Gl. (9) gegeben. Fassen wir die beiden symmetrischen Hälften $\left(-\frac{l}{2} \leq x \leq 0 \text{ und } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$ zu je einer Gruppe zusammen, so ergibt sich aus dem Satz 6, daß der Schwerpunktsabstand der beiden Gruppen unverändert bleiben muß. Der Schwerpunkt eines Wirbelsystems nach Gl. (9) von 0 bis $\frac{l}{2}$ liegt, wie man leicht ausrechnen kann, in einem Abstand

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{l}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

von der Mitte. Der Abstand der Schwerpunkte der beiden Gruppen ist demnach

$$a = 2x_0 = \frac{\pi}{4} l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

Dies ist demnach auch der Abstand der Schwerpunkte der beiden sich bildenden Einzelwirbel (Abb. 5). Im vorliegenden Falle ergibt sich aus der ständigen Symmetrie des Vorganges, daß die Schwerpunktsverschiebungen stets parallel zur Symmetrieebene stattfinden, und daß demnach auch die Einzelwirbel symmetrisch zur ursprünglichen Symmetrieebene liegen.

[7]) Vgl. etwa Handb. d. Phys. Bd. VII, S. 239 ff.
[8]) Handb. d. Phys. a. a. O.

Man kann mit ähnlichen Überlegungen auch den zeitlichen Verlauf des Aufwicklungsvorganges verfolgen, doch erfordert dies ziemlich umständliche Rechnungen. Bis jetzt ist der Verlauf des Vorganges in seinen ersten Stadien genauer untersucht, wenn der aufgewickelte Teil noch sehr klein gegenüber der ganzen Unstetigkeitsfläche ist[9]).

Hier soll versucht werden, über die Größe der Endwirbel und über die Verteilung der Zirkulation in denselben eine näherungsweise Aussage zu gewinnen. Wir teilen die Wirbel der Unstetigkeitsfläche an einer beliebigen Stelle x und fassen die links von dieser Stelle liegenden Wirbel zu einer Gruppe, die rechts davon liegenden (Abb. 6 dick ausgezogen) zu einer anderen Gruppe zusammen. Wenn wir nun annehmen, daß die gegenseitigen Kräfte auf die beiden Gruppen bei festgehaltenen Wirbeln durch den Schwerpunkt der beiden Gruppen gehen, was bei der verhältnismäßig starken Konzentration der Wirbel nach den Enden zu und der dadurch bedingten deutlichen Trennung der beiden Wirbelgruppen ziemlich genau zutrifft, so muß das Trägheitsmoment einer Wirbelgruppe beim Aufwickeln angenähert unverändert bleiben. Die Gesamtzirkulation einer Wirbelgruppe der unaufgewickelten Unstetigkeitsfläche von x bis $\frac{l}{2}$ ist

$$\Gamma_x = \int_x^{l/2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\, d x = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2} \quad \ldots \quad (13).$$

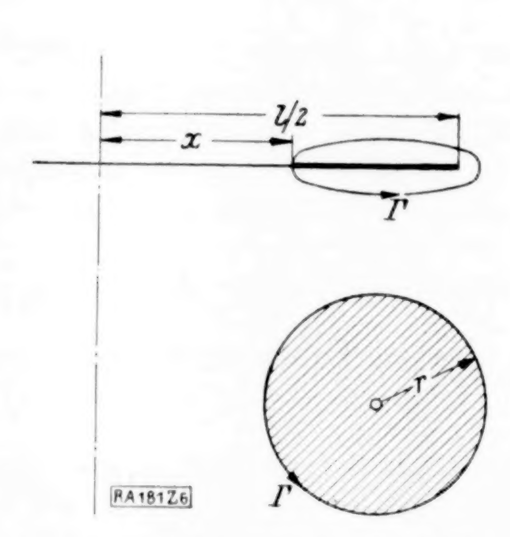


Abb. 6. Teil der Unstetigkeitsfläche und Kreis, auf den sie sich nach dem Aufwickeln verteilt.

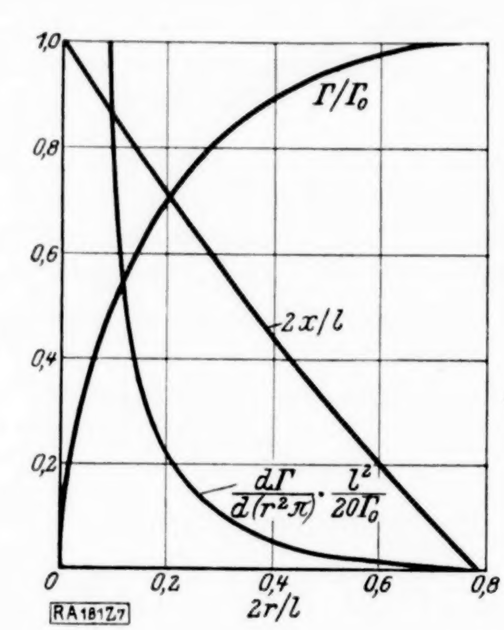


Abb. 7. Zusammenhang zwischen aufgewickelter und nicht aufgewickelter Unstetigkeitsfläche.

Wir führen für die weitere Rechnung an Stelle der Veränderlichen x den Winkel φ ein, der mit x durch die Beziehung

$$\cos\varphi = \frac{2x}{l} \text{ bzw. } \sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2} \quad \ldots \quad (14)$$

verbunden ist. Es ist also die Wirbelverteilung (Gl. 9)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \Gamma_0 \left(\frac{2}{l}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2}} = \Gamma_0 \frac{2}{l} \operatorname{ctg}\varphi \quad \ldots \quad (9a),$$

$$\Gamma_x = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2} = \Gamma_0 \sin\varphi \quad \ldots \quad (13a).$$

Der Schwerpunkt dieser Gruppe hat die Entfernung

$$x_1 = \frac{1}{\Gamma_x} \int_x^{l/2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\, x\, d x = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{l}{2} \int_0^{\varphi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{l}{4 \sin\varphi} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right] \quad \ldots \quad (15).$$

Das Trägheitsmoment der Gruppe in bezug auf die Mitte der Unstetigkeitsfläche ($x = 0$) ist

$$J_0 = \int_x^{l/2} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\, x^2\, d x = \Gamma_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \int_0^{\varphi} \cos^3\varphi\, d\varphi = \Gamma_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \sin\varphi \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2\varphi\right) \quad \ldots \quad (16).$$

[9]) H. Kaden: Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche (Göttinger Dissertation). Ing.-Arch. 2 (1931), S. 140.

Das Trägheitsmoment der Gruppe in bezug auf seinen Schwerpunkt ist

$$J_x = J_0 - \Gamma_x x_1^{\,2} = \Gamma_0 \left\{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \sin\varphi\left(1 - \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right) - \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin\varphi}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]^2\right\} \quad . \quad (17).$$

Dieses Trägheitsmoment muß nach dem Aufspulen wieder vorhanden sein. Wir wollen die aufgespulte Gruppe als kreisförmig annehmen, d. h. von der Unsymmetrie absehen, welche durch die gegenseitige Einwirkung der beiden aufgespulten Wirbel bedingt ist. Wir können dann die Zirkulation als eine reine Funktion des Radius ($\Gamma = f(r)$) darstellen. Unsere Wirbelpruppe von x bis $\frac{l}{2}$ ist zu einer den Kreis mit dem Radius r ausfüllenden Spirale aufgewickelt. Es muß dann die Zirkulation Γ_r gleich der Zirkulation der ursprünglichen Wirbelgruppe sein

$$\Gamma_r = \Gamma_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

und außerdem muß das Trägheitsmoment der in diesem Kreis aufgewickelten Wirbel gleich dem ursprünglichen Trägheitsmoment der Wirbelgruppe sein

$$J_r = \int_0^r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} r^2 \, d r = J_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Lassen wir r um dr wachsen, so nimmt unter Einhaltung dieser Bedingungen x um dx ab bzw. φ um $d\varphi$ zu. Dabei wächst die Zirkulation um

$$\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r} d r = \frac{\partial \Gamma_x}{\partial \varphi} d\varphi = \Gamma_0 \cos\varphi \, d\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

und das Trägheitsmoment um

$$\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r} r^2 d r = \frac{\partial J_x}{\partial \varphi} d\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Nun ergibt sich durch Differenzieren von Gl. (17)

$$\frac{\partial J_x}{\partial \varphi} = \Gamma_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left[\cos^3\varphi + \frac{\cos\varphi}{4\sin^2\varphi}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^2 - \frac{1}{2\sin\varphi}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)(1 + \cos 2\varphi)\right].$$

Dies in Gl. (21) eingesetzt, ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (20)

$$\left(\frac{2r}{l}\right)^2 = \cos^2\varphi + \frac{1}{4\sin^2\varphi}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^2 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Da $\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2}$, so stellt Gl. (22) den Zusammenhang zwischen r und x dar, d. h. sie gibt an, wie groß der Kreis ist, in den ein Stück der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche übergegangen ist. Da weiterhin die Zirkulation $\Gamma = \Gamma_0 \sin\varphi$ bekannt ist, so ergibt die Gleichung auch die Verteilung der Zirkulation im aufgewickelten Endwirbel. In Abb. 7 sind die zusammengehörigen Werte von Γ und x über r aufgetragen, außerdem die Verteilung der Wirbeldichte $\frac{d\Gamma}{d(r^2\pi)} \cdot \frac{l^2}{20\,\Gamma_0}$. Für sehr kleine Werte von φ ergibt sich aus Gl. (22) durch Bildung der betreffenden Grenzübergänge

$$\left(\frac{2r}{l}\right)^2 = \frac{1}{9}\sin^4\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

und daraus

$$\frac{r}{\frac{l}{2} - x} = \frac{2}{3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

D. h. ein kleines Randstück der Unstetigkeitsfläche geht bei der Aufwicklung in einen Kreis über, dessen Radius $\frac{2}{3}$ der Länge des ursprünglichen Stückes ist. Dieses Ergebnis ist auch in der erwähnten Dissertation von Kaden verwandt worden.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $\frac{2r}{l} = \frac{\pi}{4}$. Das heißt, der Radius der Endwirbel ist $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{l}{2}$. Da der Mittelpunkt der Endwirbel im Abstand $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{l}{2}$ von der Symmetrieebene liegt, so würde das bedeuten, daß sich die beiden Endwirbel gerade berühren. Bei so starker Nähe der beiden Wirbel ist aber unsere Annahme, daß die einzelnen Endwirbel kreissymmetrisch sein

sollen, sicher nicht mehr zutreffend: zwischen den beiden Wirbeln ist die Geschwindigkeit wesentlich höher als außerhalb, dadurch verschieben sich die einzelnen Stromlinien nach außen. Die Wirbel werden sich daher in Wirklichkeit nicht berühren. Eine genauere Verfolgung dieser Verhältnisse steht noch aus. Das gefundene Näherungsergebnis mag aber wegen seiner Einfachheit ein leicht zu merkendes Bild von der Größenordnung der Wirbel geben. Aus Abb. 7 geht hervor, daß der Zusammenhang zwischen r und x ziemlich linear ist. Im größten Teil des Wirbels ist daher gemäß Gl. (24) $r = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2} - x\right)$, erst im äußeren Rand des Wirbels geht der Faktor $\frac{2}{3}$ in $\frac{\pi}{4}$ über. Die Kurve für die Verteilung der Wirbeldichte zeigt, daß trotz der verhältnismäßig großen Ausdehnung der Wirbel der Hauptteil derselben doch sehr stark um den Mittelpunkt konzentriert ist.

2. Vorgänge hinter einem Schaufelgitter. Ähnlich wie bei einem einzelnen Flügel bilden sich auch bei einem Schaufelgitter (Abb. 8) hinter den Schaufeln Unstetigkeitsflächen, welche bei günstigster Auftriebsverteilung sich relativ zur ungestörten Strömung ebenfalls wie starre

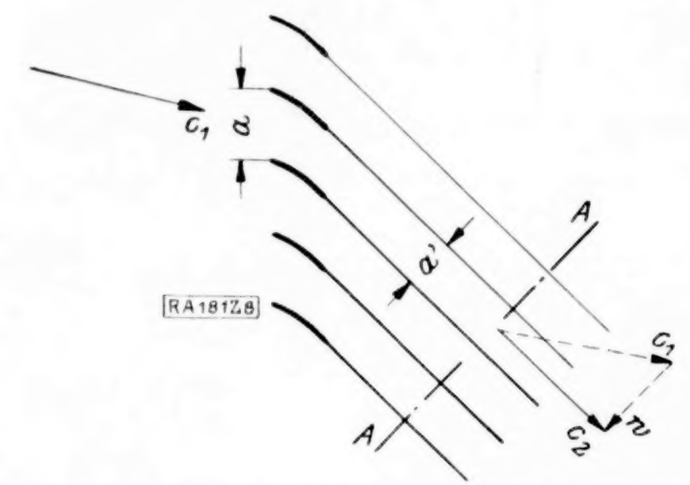


Abb. 8. Strömung durch ein Schaufelgitter mit hypothetischen starren Unstetigkeitsflächen.

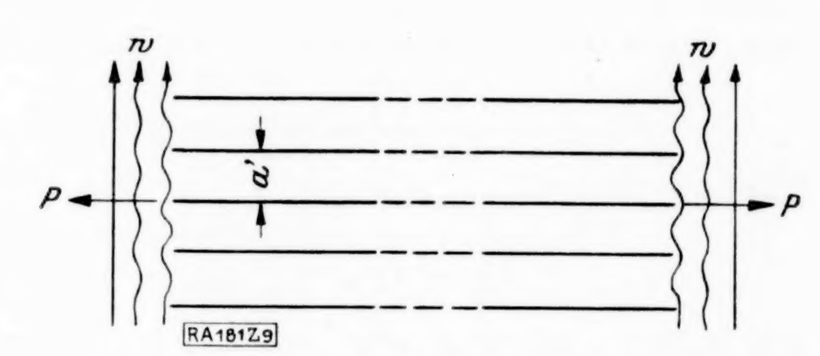


Abb. 9. Strömung um die theoretischen nicht aufgewickelten Unstetigkeitsflächen im Schnitt A—A.

Flächen bewegen würden, wenn die Saugkraft an ihren Rändern aufgenommen werden könnte. In Wirklichkeit wickeln sie sich aber mit der Zeit auf[10]). Wir wollen den fast stets vorliegenden Fall betrachten, daß der Abstand a' der Flächen klein ist gegenüber ihrer Spannweite. Denken wir uns die Unstetigkeitsflächen tatsächlich starr, wie es in der Theorie fast immer geschieht, so hätte die Strömung um die starren Flächen weit hinter den Schaufeln in der Nähe des Randes den in Abb. 9 dargestellten Verlauf, wenn wir ein Koordinatensystem wählen, in welchem diese Flächen ruhen. Da bei diesem Koordinatensystem die Bewegung stationär ist, können wir die Bernoullische Gleichung anwenden. Da die Störungsgeschwindigkeit zwischen den Flächen in großer Entfernung vom Rande relativ zu den Flächen verschwindend klein wird, während außen in der ungestörten Strömung die Relativgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt der Verschiebegeschwindigkeit w ist, so haben wir nach der Bernoullischen Gleichung zwischen den Flächen einen Überdruck

$$p = \varrho \frac{w^2}{2} \qquad (25)$$

gegenüber dem Druck in der ungestörten Strömung neben den Flächen[11]). Dieser Überdruck ist im Gleichgewicht mit den Saugkräften auf die Plattenkanten. Wenn wir nämlich die wagerechten Kräfte betrachten, welche auf einen Flüssigkeitsstreifen von der Höhe des Flächenabstandes a' wirken, so haben wir einerseits infolge der Druckdifferenz zwischen außen und innen eine Kraft $a' \varrho \frac{w^2}{2}$, andererseits die Saugkraft auf eine Plattenkante. Impulse werden durch die Grenzflächen nicht transportiert, deshalb muß die Saugkraft

$$P = a' \varrho \frac{w^2}{2} \qquad (26)$$

sein.

[10]) Handb. d. Phys. Bd. VII, S. 272 ff.

[11]) Dicht hinter dem Gitter herrschen andere Drücke und andere Geschwindigkeiten. Durch Zusammenziehen oder Auseinanderrücken der seitlichen Ränder der Unstetigkeitsflächen (positive oder negative Kontraktion) stellt sich aber im weiteren Verlauf der Strömung ein Gleichgewicht mit dem Druck der seitlichen ungestörten Strömung her, wobei sich die Geschwindigkeit entsprechend ändert (vgl. Handb. d. Phys. Bd. VII, S. 259). Hier und im folgenden betrachten wir nur die Verhältnisse nach diesem Ausgleich.

Für manche Zwecke ist zu beachten, daß infolge der Breitenänderung der hypothetischen starren Unstetigkeitsflächen die Saugkraft auf die Kanten derselben eine Komponente in der Strömungsrichtung besitzt.

Bei einem solchen Flächensystem sind die Wirbel sehr stark auf die Ränder konzentriert, in größerer Entfernung vom Rande, also im ganzen mittleren Teil der Flächen sind ja die Relativgeschwindigkeiten nahezu Null und damit natürlich auch die Geschwindigkeitsunterschiede auf beiden Seiten der Flächen, die Wirbel. Daher ist die Wirkung der aufgewickelten und der nicht aufgewickelten Unstetigkeitsflächen in Entfernungen, die groß gegen den Flächenabstand a' sind, gleich, da ja die räumliche Umlagerung der Wirbel beim Aufwickeln unbedeutend ist gegenüber der großen Entfernung. Es ist aber für die Strömung doch ein prinzipieller Unterschied, zwischen dem theoretischen Vorgang mit nicht aufgewickelten starren Flächen und dem wirklichen mit aufgewickelten Einzelwirbeln, auf den meines Wissens bisher nicht hingewiesen wurde. Er ist im wesentlichen durch den Wegfall der Saugkraft bedingt.

Die Wirbelgruppe auf der einen Seite befindet sich im Geschwindigkeitsfelde der Wirbel der anderen. Wegen der großen Entfernung ändert sich dieses Feld nicht merklich beim Aufwickeln. Wenn wir daher die Wirbel vor und nach dem Aufwickeln uns festgehalten denken, so bleibt die gegenseitige Kraft, welche die beiderseitigen Wirbel aufeinander ausüben, unverändert. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit der aufgewickelten und der nicht aufgewickelten Wirbel müßte also dieselbe sein. Wenn wir uns aber die Unstetigkeitsflächen starr vorstellen, so sind sie nicht mehr kräftefrei, da ja hier noch die Saugkräfte P hinzukommen. Für die starr gedachten Flächen ist demnach die Geschwindigkeit um einen Betrag

$$\Delta w = \frac{P}{\varrho \Gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

größer als bei den freien Wirbeln. Γ ist dabei die Zirkulation um den auf einer Seite von der Symmetrieebene liegenden Teil einer Unstetigkeitsfläche bezw. um den sich daraus entwickelnden Einzelwirbel (im übrigen auch gleich der Zirkulation um die Schaufel in ihrem mittleren Teil). Aus Abb. 9 kann man durch Verfolgen des Linienintegrals leicht ablesen, daß

$$\Gamma = a' w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

ist. Damit wird unter Berücksichtigung von Gl. (26)

$$\Delta w = \frac{w}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Für die Geschwindigkeit der freien Wirbel ergibt sich demnach

$$w' = w - \Delta w = \frac{w}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

Tatsächlich ist nun auch der Vorgang des Aufwickelns so, daß der Schwerpunkt der an jedem Flächenrande angehäuften Wirbel hinter der Geschwindigkeit des mittleren Hauptteiles der Flächen zurückbleibt. Während der letztere sich mit der Geschwindigkeit w bewegt, bewegt sich der Schwerpunkt der Wirbel nur mit der Geschwindigkeit $\frac{w}{2}$ und behält diese Geschwindigkeit auch im Endzustand nach dem Aufwickeln bei.

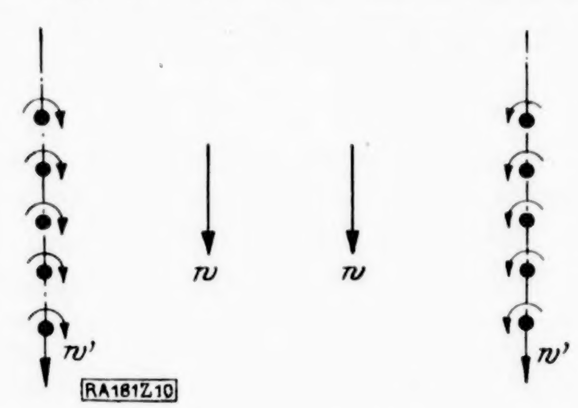


Abb. 10. Geschwindigkeiten relativ zur ungestörten Strömung.

Man kann diese Schwerpunktsgeschwindigkeit $\frac{w}{2}$ übrigens auch direkt aus dem Felde der gegenüberliegenden Wirbel ableiten. Es ist in großer Entfernung identisch mit dem einer lotrechten Reihe von konzentrierten Wirbeln, wie nach der Aufwicklung (Abb. 10). Das Feld einer solchen Wirbelreihe ist aber in einiger Entfernung eine konstante Geschwindigkeit $\pm w' = \pm \frac{\Gamma}{2\,a'}$, welche auf der einen Seite nach oben, auf der anderen Seite nach unten gerichtet ist. Zwischen den beiden Wirbelreihen addieren sich die Felder der beiden Reihen zur Geschwindigkeit w, so daß also

$$w = 2\,w' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

ist. Außerhalb der beiden Reihen haben die Felder entgegengesetztes Vorzeichen, so daß hier

die Geschwindigkeit Null ist. Jede Wirbelreihe selbst bewegt sich unter dem Einfluß des Feldes der jeweiligen anderen Reihe, also mit der Geschwindigkeit

$$w' = \frac{w}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Das Aufwickeln hat aber noch eine andere Folge, welche nicht so bequem zu übersehen ist wie die Änderung der Wirbelgeschwindigkeit. Bei den starren Flächen hatten wir im inneren Teil der abgelenkten Strömung einen Überdruck $q = \varrho \frac{w^2}{2}$, dem durch die Saugkräfte an den Flächenkanten das Gleichgewicht gehalten wurde. Nach dem Aufwickeln ist keine Saugkraft mehr vorhanden, es kann infolgedessen jetzt auch kein Überdruck im Innern zwischen den Wirbelreihen mehr herrschen. Man kann dies auch auf Grund der Bernoullischen Gleichung einsehen. Bei dem in Abb. 10 gewählten Koordinatensystem ist die Geschwindigkeit der Innenströmung w, die der Außenströmung Null, die der Wirbel $\frac{w}{2}$. Um stationäre Verhältnisse zu bekommen, müssen wir ein Kordinatensystem wählen, in dem die Wirbel ruhen. Dann ist die Geschwindigkeit der Innenströmung $\frac{w}{2}$ und die der Außenströmung $-\frac{w}{2}$ (Abb. 11). Beide sind von gleicher absoluter Größe, daher müssen auch die Drücke außerhalb und innerhalb der Wirbelreihen gleich sein.

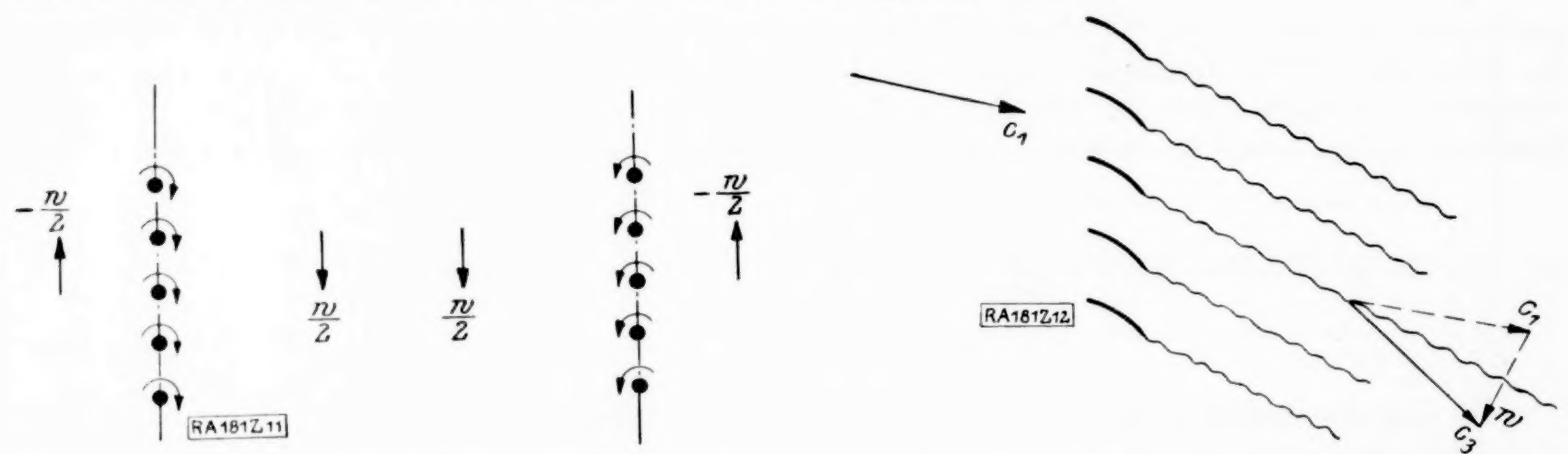


Abb. 11. Geschwindigkeiten nach der Aufwicklung relativ zu den Wirbeln (stationäre Strömung).

Abb. 12. Geschwindigkeitszusammensetzung nach der Aufwicklung.

Diese Änderung des Druckes während des Aufwickelns ist nun nicht ohne Einfluß auf die Strömung im Innengebiet. Wenn wir einen Schnitt durch das Flügelgitter (Abb. 8 u. 12) betrachten und die Bernoullische Gleichung auf die Geschwindigkeiten vor und hinter dem Gitter anwenden, so erhalten wir bei Druckgleichheit (aufgewickelte Wirbel, Abb. 12)

$$c_3 = c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33),$$

bei einem Überdruck $p = \varrho \frac{w^2}{2}$ (nicht aufgewickelte Wirbel)

$$c_2^2 + w^2 = c_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Die Geschwindigkeit ist also nach dem Aufwickeln größer als vorher ($c_3 > c_2$).

Dieses zunächst wohl etwas merkwürdig erscheinende Ergebnis kann man sich auch noch auf andere Weise klarmachen. Betrachten wir das Gitter mit den abgehenden Wirbeln von der Seite, und zwar einmal mit nicht aufgewickelten Wirbelflächen (Abb. 8) und einmal mit aufgewickelten Wirbeln (Abb. 12), so ist die Richtung der abgehenden Wirbel verschieden, da ihre Eigengeschwindigkeit relativ zur ungestörten Strömung verschieden ist $\left(w \text{ und } \frac{w}{2}\right)$. Die Störungsgeschwindigkeit w, die man ja als Feld der Wirbel auffassen kann, steht senkrecht zu den Wirbeln, hat also in beiden Fällen etwas verschiedene Lage. Bei den nicht aufgewickelten Wirbeln liegen die Wirbel in Richtung von c_2, w steht also senkrecht zu c_2 (Abb. 8) und da c_2 sich aus der ungestörten Geschwindigkeit c_1 und der Störungsgeschwindigkeit w zusammensetzt, ist

$$c_2^2 = c_1^2 - w^2.$$

Im aufgewickelten Zustande bewegen sich die Wirbel mit der Eigengeschwindigkeit $\frac{w}{2}$, liegen daher in ihrer Richtung zwischen c_1 und c_3. Da w und damit auch $\frac{w}{2}$ wieder senkrecht zu den Wirbeln steht, so bilden die Geschwindigkeitsvektoren c_1, c_3, w ein gleichzeitiges Dreieck, dessen Mittellinie die Wirbellinie ist (Abb. 12). Daraus ergibt sich aber, daß $c_3 = c_1$ wird. 181

Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen durch Elimination aufzulösen.

Von *G. Worch* in Darmstadt.

Unter dieser Überschrift berichtet Herr Prof. R. Mehmke über das Verfahren von B. J. Clasen[1]). Dieses Verfahren stellt zweifellos einen originellen und interessanten Weg zur Auflösung linearer Gleichungen dar; ob aber für die praktische Rechnung eine Ersparnis an Rechenarbeit dabei herauskommt (Herr Mehmke berichtet von einer Ersparnis von $^1/_5$ aller Multiplikationen gegenüber der Gaußschen Methode), erscheint nach dem folgenden wohl noch zweifelhaft. Als Beispiel sei die Lösung von 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten X_a bis X_d behandelt:

$$
\begin{aligned}
X_a\delta_{aa}+X_b\delta_{ba}+X_c\delta_{ca}+X_d\delta_{da}&=Z_a\,{}^{2)}\\
X_a\delta_{ab}+X_b\delta_{bb}+X_c\delta_{cb}+X_d\delta_{db}&=Z_b\\
X_a\delta_{ac}+X_b\delta_{bc}+X_c\delta_{cc}+X_d\delta_{dc}&=Z_c\\
X_a\delta_{ad}+X_b\delta_{bd}+X_c\delta_{cd}+X_d\delta_{dd}&=Z_d.
\end{aligned}
$$

Das Verfahren von Clasen führt in 3 Gängen zum Ziel. Im ersten Gang werden die beiden ersten Gleichungen umgeformt zu

$$
\begin{aligned}
X_a\delta_{aa_1}\qquad\qquad\quad+X_c\delta_{ca_1}+X_d\delta_{da_1}&=Z_{a_1}\,{}^{3)}\\
X_b\delta_{bb_1}+X_c\delta_{cb_1}+X_d\delta_{db_1}&=Z_{b_1}.
\end{aligned}
$$

Darin bedeuten:

$$
\begin{aligned}
\delta_{bb_1}&=\delta_{bb}\delta_{aa}-\delta_{ba}\delta_{ab}\\
\delta_{cb_1}&=\delta_{cb}\delta_{aa}-\delta_{ca}\delta_{ab}\\
\delta_{db_1}&=\delta_{db}\delta_{aa}-\delta_{da}\delta_{ab}\\
Z_{b_1}&=Z_b\delta_{aa}-Z_a\delta_{ab}.\\
\delta_{aa_1}&=\delta_{aa}\mu_{ba}=\delta_{bb_1}\\
\delta_{ca_1}&=\delta_{ca}\mu_{ba}-\delta_{cb_1}\nu_{ba} \qquad \mu_{ba}=\frac{\delta_{bb_1}}{\delta_{aa}}\\
\delta_{da_1}&=\delta_{da}\mu_{ba}-\delta_{db_1}\nu_{ba}\\
Z_{a_1}&=Z_a\mu_{ba}-Z_{b_1}\nu_{ba} \qquad \nu_{ba}=\frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}.
\end{aligned}
$$

Diese beiden Gleichungen mit der dritten ursprünglichen Gleichung werden nun im 2. Gang auf die folgende Form gebracht:

$$
\begin{aligned}
X_a\delta_{aa_2}\qquad\qquad\qquad\qquad+X_d\delta_{da_2}&=Z_{a_2}\\
X_b\delta_{bb_2}\qquad\qquad+X_d\delta_{db_2}&=Z_{b_2}\\
X_c\delta_{cc_2}+X_d\delta_{dc_2}&=Z_{c_2}.
\end{aligned}
$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$
\begin{aligned}
\delta_{cc_2}&=\delta_{cc}\delta_{aa_1}-\delta_{cb_1}\delta_{bc}-\delta_{ca_1}\delta_{ac}\\
\delta_{dc_2}&=\delta_{dc}\delta_{aa_1}-\delta_{db_1}\delta_{bc}-\delta_{da_1}\delta_{ac}\\
Z_{c_2}&=Z_c\delta_{aa_1}-Z_{b_1}\delta_{bc}-Z_{a_1}\delta_{ac}.\\
\delta_{bb_2}&=\delta_{bb_1}\mu_{cb}=\delta_{cc_2} \qquad \mu_{cb}=\frac{\delta_{cc_2}}{\delta_{bb_1}}\\
\delta_{db_2}&=\delta_{db_1}\mu_{cb}-\delta_{dc_2}\nu_{cb}\\
Z_{b_2}&=Z_{b_1}\mu_{cb}-Z_{c_2}\nu_{cb} \qquad \nu_{cb}=\frac{\delta_{cb_1}}{\delta_{bb_1}}.
\end{aligned}
$$

[1]) R. Mehmke: Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen durch Elimination aufzulösen. Diese Zeitschrift 1930, H. 5, S. 508.

[2]) In dieser Form pflegt man in der Baustatik die Elastizitätsgleichungen anzuschreiben.

[3]) Nach der Bezeichnungsweise von Mehmke müßte man δ_{aa2}, δ_{ca2} usw. schreiben. Mit Rücksicht darauf, daß sich diese Abkürzungen als Verschiebungswerte an einem einfach statisch unbestimmten Hauptsystem deuten lassen, heiße der dritte Zeiger 1 (und nicht 2).

$$\delta_{aa_2} = \delta_{aa_1}\mu_{ca} = \delta_{cc_2} \qquad \mu_{ca} = \frac{\delta_{cc_2}}{\delta_{aa_1}}$$
$$\delta_{da_2} = \delta_{da_1}\mu_{ca} - \delta_{dc_2}\nu_{ca}$$
$$Z_{a_2} = Z_{a_1}\mu_{ca} - Z_{c_2}\nu_{ca} \qquad \nu_{ca} = \frac{\delta_{ca_1}}{\delta_{aa_1}}.$$

Im dritten Gang faßt man schließlich diese drei Gleichungen mit der letzten der ursprünglichen Gleichungsgruppe zusammen und formt um zu:

$$\begin{aligned} X_a\delta_{aa_3} &= Z_{a_3} \\ X_b\delta_{bb_3} &= Z_{b_3} \\ X_c\delta_{cc_3} &= Z_{c_3} \\ X_d\delta_{dd_3} &= Z_{d_3}. \end{aligned}$$

Hierin ist:

$$\delta_{dd_3} = \delta_{dd}\delta_{aa_2} - \delta_{dc_2}\delta_{cd} - \delta_{db_2}\delta_{bd} - \delta_{da_2}\delta_{ad}$$
$$Z_{d_3} = Z_d\delta_{aa_2} - Z_{c_2}\delta_{cd} - Z_{b_2}\delta_{bd} - Z_{a_2}\delta_{ad}.$$

$$\delta_{cc_3} = \delta_{cc_2}\mu_{dc} = \delta_{dd_3} \qquad \mu_{dc} = \frac{\delta_{dd_3}}{\delta_{cc_2}}$$
$$Z_{c_3} = Z_{c_2}\mu_{dc} - Z_{d_3}\nu_{dc} \qquad \nu_{dc} = \frac{\delta_{dc_2}}{\delta_{cc_2}}.$$
$$\delta_{bb_3} = \delta_{bb_2}\mu_{db} = \delta_{dd_3} \qquad \mu_{db} = \frac{\delta_{dd_3}}{\delta_{bb_2}}$$
$$Z_{b_3} = Z_{b_2}\mu_{db} - Z_{d_3}\nu_{db} \qquad \nu_{db} = \frac{\delta_{db_2}}{\delta_{bb_2}}.$$
$$\delta_{aa_3} = \delta_{aa_2}\mu_{da} = \delta_{dd_3} \qquad \mu_{da} = \frac{\delta_{dd_3}}{\delta_{aa_2}}$$
$$Z_{a_3} = Z_{a_2}\mu_{da} - Z_{d_3}\nu_{da} \qquad \nu_{da} = \frac{\delta_{da_2}}{\delta_{aa_2}}.$$

Die Unbekannten ergeben sich somit zu:

$$X_a = \frac{Z_{a_3}}{\delta_{aa_3}}; \qquad X_b = \frac{Z_{b_3}}{\delta_{bb_3}}; \qquad X_c = \frac{Z_{c_3}}{\delta_{cc_3}}; \qquad X_d = \frac{Z_{d_3}}{\delta_{dd_3}}.$$

Für die praktische Rechnung kann man sich des folgenden Rechenschemas (Zahlentafel 1) bedienen. Am linken Rande stehen die Quotienten μ und ν, mit denen — nach der Rechenvorschrift in der 2. Spalte — die jeweiligen Zeilen zu erweitern sind. Die zu summierenden Zeilen stehen unmittelbar untereinander; wer ganz sichergehen will, deckt den übrigen Teil ab, so daß nur die zu addierenden Werte sichtbar bleiben.

Wie man leicht nachprüfen kann, sind nach dem Verfahren von Clasen Rechenoperationen in folgender Anzahl durchzuführen:

9 Quotienten μ bzw. ν
45 Produkte
14 Summen mit je 2 Summanden
3 Summen mit je 3 Summanden
2 Summen mit je 4 Summanden
4 Quotienten $X = \frac{Z}{\delta}$.

Nicht mitgezählt sind dabei die (in Zahlentafel 1) mit einem * versehenen Ausdrücke, da es sich bei diesen um Rechenproben handelt.

Das Verfahren von Gauß: Der Rechnungsgang nach Gauß läßt sich in zwei Abschnitte einteilen. Der erste Abschnitt wird ebenfalls in 3 Gängen durchgeführt. Im ersten Gang schaltet man die Unbekannte X_a aus sämtlichen Gleichungen aus und gewinnt die folgende Gleichungsgruppe:

$$X_b\delta_{bb_1} + X_c\delta_{cb_1} + X_d\delta_{db_1} = Z_{b_1}$$
$$X_b\delta_{bc_1} + X_c\delta_{cc_1} + X_d\delta_{dc_1} = Z_{c_1}$$
$$X_b\delta_{bd_1} + X_c\delta_{cd_1} + X_d\delta_{dd_1} = Z_{d_1}.$$

Zahlentafel 1

Faktor	Rechenvorschrift	Vorzahlen δ				Belastungsglieder Z
	(1)	δ_{aa}	δ_{ba}	δ_{ca}	δ_{da}	Z_a
	(2)	δ_{ab}	δ_{bb}	δ_{cb}	δ_{db}	Z_b
δ_{aa}	$(3) = (2) \cdot \delta_{aa}$		$\delta_{bb}\,\delta_{aa}$	$\delta_{cb}\,\delta_{aa}$	$\delta_{db}\,\delta_{aa}$	$Z_b\,\delta_{aa}$
δ_{ab}	$(4) = -(1) \cdot \delta_{ab}$		$-\delta_{ba}\,\delta_{ab}$	$-\delta_{ca}\,\delta_{ab}$	$-\delta_{da}\,\delta_{ab}$	$-Z_a\,\delta_{ab}$
	$(5) = (3) + (4)$		δ_{bb_1}	δ_{cb_1}	δ_{db_1}	Z_{b_1}
$\mu_{ba} = \frac{\delta_{bb_1}}{\delta_{aa}}$	$(6) = (1)\,\mu_{ba}$	$\delta_{aa}\,\mu_{ba}$*		$\delta_{ca}\,\mu_{ba}$	$\delta_{da}\,\mu_{ba}$	$Z_a\,\mu_{ba}$
$\nu_{ba} = \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}$	$(7) = -(5)\,\nu_{ba}$			$-\delta_{cb_1}\,\nu_{ba}$	$-\delta_{db_1}\,\nu_{ba}$	$-Z_{b_1}\,\nu_{ba}$
	$(8) = (6) + (7)$	δ_{aa_1}*		δ_{ca_1}	δ_{da_1}	Z_{a_1}
	(9)	δ_{ac}	δ_{bc}	δ_{cc}	δ_{dc}	Z_c
δ_{aa_1}	$(10) = (9)\,\delta_{aa_1}$			$\delta_{cc}\,\delta_{aa_1}$	$\delta_{dc}\,\delta_{aa_1}$	$Z_c\,\delta_{aa_1}$
δ_{bc}	$(11) = -(5)\,\delta_{bc}$			$-\delta_{cb_1}\,\delta_{bc}$	$-\delta_{db_1}\,\delta_{bc}$	$-Z_{b_1}\,\delta_{bc}$
δ_{ac}	$(12) = -(8)\,\delta_{ac}$			$-\delta_{ca_1}\,\delta_{ac}$	$-\delta_{da_1}\,\delta_{ac}$	$-Z_{a_1}\,\delta_{ac}$
	$(13) = (10) + (11) + (12)$			δ_{cc_2}	δ_{dc_2}	Z_{c_2}
$\mu_{cb} = \frac{\delta_{cc_2}}{\delta_{bb_1}}$	$(14) = (5)\,\mu_{cb}$		$\delta_{bb_1}\,\mu_{cb}$*		$\delta_{db_1}\,\mu_{cb}$	$Z_{b_1}\,\mu_{cb}$
$\nu_{cb} = \frac{\delta_{cb_1}}{\delta_{bb_1}}$	$(15) = -(13)\,\nu_{cb}$				$-\delta_{dc_2}\,\nu_{cb}$	$-Z_{c_2}\,\nu_{cb}$
	$(16) = (14) + (15)$		δ_{bb_2}*		δ_{db_2}	Z_{b_2}
$\mu_{ca} = \frac{\delta_{cc_2}}{\delta_{aa_1}}$*	$(17) = (8)\,\mu_{ca}$	$\delta_{aa_1}\,\mu_{ca}$*			$\delta_{da_1}\,\mu_{ca}$	$Z_{a_1}\,\mu_{ca}$
$\nu_{ca} = \frac{\delta_{ca_1}}{\delta_{aa_1}}$	$(18) = -(13)\,\nu_{ca}$				$-\delta_{dc_2}\,\nu_{ca}$	$-Z_{c_2}\,\nu_{ca}$
	$(19) = (17) + (18)$	δ_{aa_2}*			δ_{da_2}	Z_{a_2}
	(20)	δ_{ad}	δ_{bd}	δ_{cd}	δ_{dd}	Z_d
δ_{aa_2}	$(21) = (20)\,\delta_{aa_2}$				$\delta_{dd}\,\delta_{aa_2}$	$Z_d\,\delta_{aa_2}$
δ_{cd}	$(22) = -(13)\,\delta_{cd}$				$-\delta_{dc_2}\,\delta_{cd}$	$-Z_{c_2}\,\delta_{cd}$
δ_{bd}	$(23) = -(16)\,\delta_{bd}$				$-\delta_{db_2}\,\delta_{bd}$	$-Z_{b_2}\,\delta_{bd}$
δ_{ad}	$(24) = -(19)\,\delta_{ad}$				$-\delta_{da_2}\,\delta_{ad}$	$-Z_{a_2}\,\delta_{ad}$
	$(25) = (21) + (22) + (23) + (24)$				δ_{dd_3}	Z_{d_3}
$\mu_{dc} = \frac{\delta_{dd_3}}{\delta_{cc_2}}$	$(26) = (13)\,\mu_{dc}$			$\delta_{cc_2}\,\mu_{dc}$*		$Z_{c_2}\,\mu_{dc}$
$\nu_{dc} = \frac{\delta_{dc_2}}{\delta_{cc_2}}$	$(27) = -(25)\,\nu_{dc}$					$-Z_{d_3}\,\nu_{dc}$
	$(28) = (26) + (27)$			δ_{cc_3}*		Z_{c_3}
$\mu_{db} = \frac{\delta_{dd_3}}{\delta_{bb_2}}$*	$(29) = (16)\,\mu_{db}$		$\delta_{bb_2}\,\mu_{db}$*			$Z_{b_2}\,\mu_{db}$
$\nu_{db} = \frac{\delta_{db_2}}{\delta_{bb_2}}$	$(30) = -(25)\,\nu_{db}$					$-Z_{d_3}\,\nu_{db}$
	$(31) = (29) + (30)$		δ_{bb_3}*			Z_{b_3}
$\mu_{da} = \frac{\delta_{dd_3}}{\delta_{aa_2}}$*	$(32) = (19)\,\mu_{da}$	$\delta_{aa_2}\,\mu_{da}$*				$Z_{a_2}\,\mu_{da}$
$\nu_{da} = \frac{\delta_{da_2}}{\delta_{aa_2}}$	$(33) = -(25)\,\nu_{da}$					$-Z_{d_3}\,\nu_{da}$
	$(34) = (32) + (33)$	δ_{aa_3}*				Z_{a_3}

Darin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}\delta_{b\,b_1} &= \delta_{b\,b} - \delta_{b\,a}\,\mu_b \\ \delta_{c\,b_1} &= \delta_{c\,b} - \delta_{c\,a}\,\mu_b \\ \delta_{d\,b_1} &= \delta_{d\,b} - \delta_{d\,a}\,\mu_b \\ Z_{b_1} &= Z_b - Z_a\,\mu_b\end{aligned} \qquad \mu_b = \frac{\delta_{a\,b}}{\delta_{a\,a}}.$$

$$\begin{aligned}\delta_{b\,c_1} &= \delta_{b\,c} - \delta_{b\,a}\,\mu_c \\ \delta_{c\,c_1} &= \delta_{c\,c} - \delta_{c\,a}\,\mu_c \\ \delta_{d\,c_1} &= \delta_{d\,c} - \delta_{d\,a}\,\mu_c \\ Z_{c_1} &= Z_c - Z_a\,\mu_c\end{aligned} \qquad \mu_c = \frac{\delta_{a\,c}}{\delta_{a\,a}}.$$

$$\begin{aligned}\delta_{b\,d_1} &= \delta_{b\,d} - \delta_{b\,a}\,\mu_d \\ \delta_{c\,d_1} &= \delta_{c\,d} - \delta_{c\,a}\,\mu_d \\ \delta_{d\,d_1} &= \delta_{d\,d} - \delta_{d\,a}\,\mu_d \\ Z_{d_1} &= Z_d - Z_a\,\mu_d\end{aligned} \qquad \mu_d = \frac{\delta_{a\,d}}{\delta_{a\,a}}.$$

Aus diesen drei Gleichungen entfernt man im zweiten Gang die Unbekannte X_b; man erhält

$$X_c\,\delta_{c\,c_2} + X_d\,\delta_{d\,c_2} = Z_{c_2}$$

$$X_c\,\delta_{c\,d_2} + X_d\,\delta_{d\,d_2} = Z_{d_2},$$

worin jetzt bedeuten

$$\begin{aligned}\delta_{c\,c_2} &= \delta_{c\,c_1} - \delta_{c\,b_1}\,\mu_{c_1} \\ \delta_{d\,c_2} &= \delta_{d\,c_1} - \delta_{d\,b_1}\,\mu_{c_1} \\ Z_{c_2} &= Z_{c_1} - Z_{b_1}\,\mu_{c_1}\end{aligned} \qquad \mu_{c_1} = \frac{\delta_{b\,c_1}}{\delta_{b\,b_1}}.$$

$$\begin{aligned}\delta_{c\,d_2} &= \delta_{c\,d_1} - \delta_{c\,b_1}\,\mu_{d_1} \\ \delta_{d\,d_2} &= \delta_{d\,d_1} - \delta_{d\,b_1}\,\mu_{d_1} \\ Z_{d_2} &= Z_{d_1} - Z_{b_1}\,\mu_{d_1}\end{aligned} \qquad \mu_{d_1} = \frac{\delta_{b\,d_1}}{\delta_{b\,b_1}}.$$

Schließlich schaltet man aus diesen beiden Gleichungen noch X_c aus und erhält

$$X_d\,\delta_{d\,d_3} = Z_{d_3}.$$

Darin ist jetzt

$$\begin{aligned}\delta_{d\,d_3} &= \delta_{d\,d_2} - \delta_{d\,c_2}\,\mu_{d_2} \\ Z_{d_3} &= Z_{d_2} - Z_{c_2}\,\mu_{d_2}\end{aligned} \qquad \mu_{d_2} = \frac{\delta_{c\,d_2}}{\delta_{c\,c_2}}.$$

Der zweite Abschnitt des Gaußschen Verfahrens dient der Ermittlung der Unbekannten selbst. Wir brauchen von jedem Gang nur die erste Gleichung.

$$\begin{aligned}X_a\,\delta_{a\,a} + X_b\,\delta_{b\,a} + X_c\,\delta_{c\,a} + X_d\,\delta_{d\,a} &= Z_a \\ X_b\,\delta_{b\,b_1} + X_c\,\delta_{c\,b_1} + X_d\,\delta_{d\,b_1} &= Z_{b_1} \\ X_c\,\delta_{c\,c_2} + X_d\,\delta_{d\,c_2} &= Z_{c_2} \\ X_d\,\delta_{d\,d_3} &= Z_{d_3}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$X_d = \frac{Z_{d_3}}{\delta_{d\,d_3}}$$

$$X_c = \frac{1}{\delta_{c\,c_2}}\,(Z_{c_2} - X_d\,\delta_{d\,c_2}) = \frac{S_2}{\delta_{c\,c_2}}$$

$$X_b = \frac{1}{\delta_{b\,b_1}}\,(Z_{b_1} - X_c\,\delta_{c\,b_1} - X_d\,\delta_{d\,b_1}) = \frac{S_1}{\delta_{b\,b_1}}$$

$$X_a = \frac{1}{\delta_{a\,a}}\,(Z_a - X_b\,\delta_{b\,a} - X_c\,\delta_{c\,a} - X_d\,\delta_{d\,a}) = \frac{S_0}{\delta_{a\,a}}.$$

Wie man erkennt, sind zur Ermittlung der Unbekannten nur die Vorzahlen $\delta_{b\,b_1}$, $\delta_{c\,b_1}$, $\delta_{d\,b_1}$, $\delta_{c\,c_2}$, $\delta_{d\,c_2}$ und $\delta_{d\,d_3}$ sowie die Belastungsglieder Z_{b_1}, Z_{c_2} und Z_{d_3} nötig. Die übrigen, vorhin angeschriebenen Summen sind nur Zwischenwerte, deren besondere Berechnung über-

flüssig ist. Eine Ausnahme machen nur diejenigen Werte, deren Kenntnis zur Berechnung der Quotienten μ erforderlich ist.

Wir werden praktisch also wie folgt rechnen [4]):

$$\begin{aligned}
\delta_{b\,b_1} &= \delta_{b\,b} - \delta_{b\,a}\mu_b \\
\delta_{c\,b_1} &= \delta_{c\,b} - \delta_{c\,a}\mu_b \\
\delta_{d\,b_1} &= \delta_{d\,b} - \delta_{d\,a}\mu_b \qquad \mu_b = \frac{\delta_{a\,b}}{\delta_{a\,a}} \\
Z_{b_1} &= Z_b - Z_a\mu_b
\end{aligned}$$

$$\delta_{b\,c_1} = \delta_{b\,c} - \delta_{b\,a}\mu_c \qquad \mu_c = \frac{\delta_{a\,c}}{\delta_{a\,a}}.$$

$$\begin{aligned}
\delta_{c\,c_2} &= \delta_{c\,c} - \delta_{c\,a}\mu_c - \delta_{c\,b_1}\mu_{c_1} \\
\delta_{d\,c_2} &= \delta_{d\,c} - \delta_{d\,a}\mu_c - \delta_{d\,b_1}\mu_{c_1} \qquad \mu_{c_1} = \frac{\delta_{b\,c_1}}{\delta_{b\,b_1}} \\
Z_{c_2} &= Z_c - Z_a\mu_c - Z_{b_1}\mu_{c_1}
\end{aligned}$$

$$\delta_{b\,d_1} = \delta_{b\,d} - \delta_{b\,a}\mu_d \qquad \mu_d = \frac{\delta_{a\,d}}{\delta_{a\,a}}.$$

$$\delta_{c\,d_2} = \delta_{c\,d} - \delta_{c\,a}\mu_d - \delta_{c\,b_1}\mu_{d_1} \qquad \mu_{d_1} = \frac{\delta_{b\,d_1}}{\delta_{b\,b_1}}.$$

$$\begin{aligned}
\delta_{d\,d_3} &= \delta_{d\,d} - \delta_{d\,a}\mu_d - \delta_{d\,b_1}\mu_{d_1} - \delta_{d\,c_2}\mu_{d_2} \qquad \mu_{d_2} = \frac{\delta_{c\,d_2}}{\delta_{c\,c_2}}. \\
Z_{d_3} &= Z_d - Z_a\mu_d - Z_{b_1}\mu_{d_1} - Z_{c_2}\mu_{d_2}
\end{aligned}$$

Das Schema für die praktische Durchführung dieser Rechnung zeigt Zahlentafel 2. Der Ermittlung der Unbekannten selbst dient die Zahlentafel 3.

Zahlentafel 2.

Faktor	Rechenvorschrift	Vorzahlen δ				Belastungsglieder Z
	(1)	$\delta_{a\,a}$	$\delta_{b\,a}$	$\delta_{c\,a}$	$\delta_{d\,a}$	Z_a
	(2)	$\delta_{a\,b}$	$\delta_{b\,b}$	$\delta_{c\,b}$	$\delta_{d\,b}$	Z_b
$\mu_b = \frac{\delta_{a\,b}}{\delta_{a\,a}}$	(3) = − (1) μ_b		$-\delta_{b\,a}\mu_b$	$-\delta_{c\,a}\mu_b$	$-\delta_{d\,a}\mu_b$	$-Z_a\mu_b$
	(4) = (2) + (3)		$\delta_{b\,b_1}$	$\delta_{c\,b_1}$	$\delta_{d\,b_1}$	Z_{b_1}
	(5)	$\delta_{a\,c}$	$\delta_{b\,c}$	$\delta_{c\,c}$	$\delta_{d\,c}$	Z_c
$\mu_c = \frac{\delta_{a\,c}}{\delta_{a\,a}}$	(6) = − (1) μ_c		$-\delta_{b\,a}\mu_c$	$-\delta_{c\,a}\mu_c$	$-\delta_{d\,a}\mu_c$	$-Z_a\mu_c$
	(7) = (5) + (6)		$\delta_{b\,c_1}$			
$\mu_{c_1} = \frac{\delta_{b\,c_1}}{\delta_{b\,b_1}}$	(8) = − (4) μ_{c_1}			$-\delta_{c\,b_1}\mu_{c_1}$	$-\delta_{d\,b_1}\mu_{c_1}$	$-Z_{b_1}\mu_{c_1}$
	(9) = (5) + (6) + (8)			$\delta_{c\,c_2}$	$\delta_{d\,c_2}$	Z_{c_2}
	(10)	$\delta_{a\,d}$	$\delta_{b\,d}$	$\delta_{c\,d}$	$\delta_{d\,d}$	Z_d
$\mu_d = \frac{\delta_{a\,d}}{\delta_{a\,a}}$	(11) = − (1) μ_d		$-\delta_{b\,a}\mu_d$	$-\delta_{c\,a}\mu_d$	$-\delta_{d\,a}\mu_d$	$-Z_a\mu_d$
	(12) = (10) + (11)		$\delta_{b\,d_1}$			
$\mu_{d_1} = \frac{\delta_{b\,d_1}}{\delta_{b\,b_1}}$	(13) = − (4) μ_{d_1}			$-\delta_{c\,b_1}\mu_{d_1}$	$-\delta_{d\,b_1}\mu_{d_1}$	$-Z_{b_1}\mu_{d_1}$
	(14) = (10) + (11) + (13)			$\delta_{c\,d_2}$		
$\mu_{d_2} = \frac{\delta_{c\,d_2}}{\delta_{c\,c_2}}$	(15) = − (9) μ_{d_2}				$-\delta_{d\,c_2}\mu_{d_2}$	$-Z_{c_2}\mu_{d_2}$
	(16) = (10) + (11) + (13) + (15)				$\delta_{d\,d_3}$	Z_{d_3}

[4]) Vgl. u. a. Domke: Die Theorie des Eisenbetons. Handbuch für Eisenbetonbau. 4. Aufl., 1. Bd., S. 522.

Zahlentafel 3.

							Z_a
					Z_{b1}	δ_{ba}	$-X_b\,\delta_{ba}$
			Z_{c2}	δ_{cb1}	$-X_c\,\delta_{cb1}$	δ_{ca}	$-X_c\,\delta_{ca}$
		δ_{dc2}	$-X_d\,\delta_{dc2}$	δ_{db1}	$-X_d\,\delta_{db1}$	δ_{da}	$-X_d\,\delta_{da}$
δ_{dd3}	Z_{d3}	δ_{cc2}	S_2	δ_{bb1}	S_1	δ_{aa}	S_0
$X_d = \frac{Z_{d3}}{\delta_{dd3}}$		$X_c = \frac{S_2}{\delta_{cc2}}$		$X_b = \frac{S_1}{\delta_{bb1}}$		$X_a = \frac{S_0}{\delta_{aa}}$	

Die Abzählung gibt die folgende Anzahl notwendiger Rechenoperationen:

	Zahlentafel 2	Zahlentafel 3	insgesamt
Quotienten μ	6	—	6
Produkte	20	6	26
Summen mit je 2 Summanden	6	1	7
Summen mit je 3 Summanden	4	1	5
Summen mit je 4 Summanden	2	1	3
Quotienten $X = \frac{S}{\delta}$	—	4	4

In den Elastizitätsgleichungen in der Baustatik ist nach dem Maxwell-Bettischen Satz $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Das Rechenschema 2 kann man in diesem Falle noch vereinfachen. Wie sich leicht nachweisen läßt, ist $\delta_{ik\nu} = \delta_{ki\nu}$; die besondere Ermittlung der Zwischenwerte δ_{bc1}, δ_{bd1} und δ_{cd2} wird also unnötig.

Zahlentafel 2a zeigt das Rechenschema für diesen Fall.

Zahlentafel 2a.

Faktor	Rechenvorschrift	Vorzahlen δ				Belastungsglieder Z
	(1)	δ_{aa}	δ_{ba}	δ_{ca}	δ_{da}	Z_a
	(2)		δ_{bb}	δ_{cb}	δ_{db}	Z_b
$\mu_b = \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}$	(3) = − (1) μ_b		$-\delta_{ba}\,\mu_b$	$-\delta_{ca}\,\mu_b$	$-\delta_{da}\,\mu_b$	$-Z_a\,\mu_b$
	(4) = (2) + (3)		δ_{bb1}	δ_{cb1}	δ_{db1}	Z_{b1}
	(5)			δ_{cc}	δ_{dc}	Z_c
$\mu_c = \frac{\delta_{ca}}{\delta_{aa}}$	(6) = − (1) μ_c			$-\delta_{ca}\,\mu_c$	$-\delta_{da}\,\mu_c$	$-Z_a\,\mu_c$
$\mu_{c1} = \frac{\delta_{cb1}}{\delta_{bb1}}$	(7) = − (4) μ_{c1}			$-\delta_{cb1}\,\mu_{c1}$	$-\delta_{db1}\,\mu_{c1}$	$-Z_{b1}\,\mu_{c1}$
	(8) = (5) + (6) + (7)			δ_{cc2}	δ_{dc2}	Z_{c2}
	(9)				δ_{dd}	Z_d
$\mu_d = \frac{\delta_{da}}{\delta_{aa}}$	(10) = − (1) μ_d				$-\delta_{da}\,\mu_d$	$-Z_a\,\mu_d$
$\mu_{d1} = \frac{\delta_{db1}}{\delta_{bb1}}$	(11) = − (4) μ_{d1}				$-\delta_{db1}\,\mu_{d1}$	$-Z_{b1}\,\mu_{d1}$
$\mu_{d2} = \frac{\delta_{dc2}}{\delta_{cc2}}$	(12) = − (8) μ_{d2}				$-\delta_{dc2}\,\mu_{d2}$	$-Z_{c2}\,\mu_{d2}$
	(13) = (9) + (10) + (11) + (12)				δ_{dd3}	d_3

Die Anzahl der notwendigen Rechenoperationen zeigt die folgende Übersicht:

	Zahlentafel 2a	Zahlentafel 3	insgesamt
Quotienten μ	6	—	6
Produkte	16	6	22
Summen mit je 2 Summanden	4	1	5
Summen mit je 3 Summanden	3	1	4
Summen mit je 4 Summanden	2	1	3
Quotienten $X = \frac{S}{\delta}$	—	4	4

Beliebig viele Gleichungen. Die Überlegungen, die im vorstehenden für 4 Gleichungen durchgeführt werden, lassen sich unschwer auf den allgemeinen Fall von n Gleichungen ausdehnen. Da sich jedoch die allgemeinen Ausdrücke nicht so schnell übersehen lassen, sei darauf verzichtet. In der folgenden Übersicht sind nur die jeweils erforderliche Anzahl der Rechenoperationen für 5 und 6 Gleichungen zusammengestellt; die Zahlen für 4 Gleichungen sind des besseren Vergleichs halber nochmals angeschrieben.

Übersicht.

	4 Unbekannte			5 Unbekannte			6 Unbekannte		
	Clasen	Gauß		Clasen	Gauß		Clasen	Gauß	
		$\delta_{ik} \neq \delta_{ki}$	$\delta_{ik} = \delta_{ki}$		$\delta_{ik} \neq \delta_{ki}$	$\delta_{ik} = \delta_{ki}$		$\delta_{ik} \neq \delta_{ki}$	$\delta_{ik} = \delta_{ki}$
Quotienten μ, ν	9	6	6	14	10	10	20	15	15
Produkte	45	26	22	84	50	40	140	85	65
Summen mit je 2 Summanden .	14	7	5	25	9	6	41	11	7
Summen mit je 3 Summanden .	3	5	4	4	7	5	5	9	6
Summen mit je 4 Summanden .	2	3	3	3	5	4	4	7	5
Summen mit je 5 Summanden .				2	3	3	3	5	4
Summen mit je 6 Summanden .							2	3	3
Quotienten $X = \frac{Z}{\delta}$ bzw. $\frac{S}{\delta}$ . . .	4	4	4	5	5	5	6	6	6

Aus dieser Übersicht geht klar hervor, daß das Verfahren von Clasen keine Ersparnis an Rechenarbeit gegenüber der Gaußschen Methode mit sich bringt. Im Gegenteil: Das Verfahren von Gauß ist, was den Aufwand an Rechenarbeit anbelangt, dem von Clasen vorgeschlagenen Lösungsweg überlegen. 160

Einfache Konstruktionen zur angenäherten Quadratur.

Von *F. Kadner* in Chemnitz.

Von den Methoden zur angenäherten Quadratur von Segmenten werden diejenigen mit gleichmäßiger Unterteilung des Integrationsintervalles (besonders die Simpsonsche Regel) stark bevorzugt. Für die zuerst von Gauß untersuchte Annäherung bei nichtgleichmäßiger Intervallteilung war anscheinend bisher nur theoretisches Interesse vorhanden. Daß einfache Sonderfälle dieser Methode sehr wohl praktisch verwendbar sind, soll im folgenden kurz gezeigt werden.

Sind im Integrationsintervall $(x_m - h \mid x_m + h)$ in n Punkten $x_i = x_m + \lambda_i h$ die Ordinaten y_i gezeichnet, und soll eine auf Mittelwertbildung der y_i beruhende Flächenformel eine Annäherung $(p-1)$-ter Ordnung liefern, d. h. die Fläche einer Parabel $(p-1)$-ter Ordnung genau angeben, so folgen aus dem Ansatz

$$2h(c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n) = \int_{x-h}^{x+h} y\,dx \qquad \text{für } y = a_0 x^{p-1} + \ldots + a_{p-1}$$

die bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned}
&c_1 + \ldots + c_n = 1 \\
&c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n = 0 \\
&c_1\lambda_1^2 + \ldots + c_n\lambda_n^2 = \frac{1}{3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_1\lambda_1^{p-1} + \ldots + c_n\lambda_n^{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } p = 2r \\ \frac{1}{p} & \text{für } p = 2r+1 \end{cases}
\end{aligned} \qquad (1).$$

Aus diesen p Gleichungen mit den $2n$ Unbekannten $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, $c_1 \ldots c_n$ läßt sich

entweder für $p = 2n$ die Flächenformel errechnen, bei der die Annäherung von der höchstmöglichen Ordnung $p - 1 = 2n - 1$ ist,

oder es lassen sich für $p < 2n$ unendlich viele Flächenformeln zur Annäherung $(p-1)$-ter Ordnung gewinnen, in denen über $2n - p$ willkürliche Parameter je nach Art der Aufgabe frei verfügt werden kann.

Bei symmetrischer Intervallteilung $\lambda_{n-i} = -\lambda_{i+1}$, $c_{n-i} = c_{i+1}$ sind in (1) die Gleichungen mit ungeraden Potenzen der λ_i identisch erfüllt, und die verbleibenden Gleichungen

(2a) für $n = 2r$ $\qquad$ (2b) für $n = 2r+1$

$$c_1 + \ldots + c_r = \frac{1}{2} \qquad c_1 + \ldots + c_r = \frac{1 - c_m}{2}$$

$$\begin{aligned}
&c_1\lambda_1^2 + \ldots + c_r\lambda_r^2 = \frac{1}{2\cdot 3} \\
&c_1\lambda_1^4 + \ldots + c_r\lambda_r^4 = \frac{1}{2\cdot 5} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (2a) \text{ u. } (2b)$$

ergeben stets den genauen Wert bis zu einem geraden p, d. h. eine Annäherung von ungerader Ordnung.

Bei **höchstmöglicher Annäherung** $p = 2n$ kann man auf verschiedene Arten (vgl. Enc. II C 2, pag. 58ff.), z. B. aus

$$\begin{vmatrix}
1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots \lambda^n \\
1 & 0 & \frac{1}{3} & \ldots \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \ldots \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \ldots \\
\ldots & & &
\end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

die λ_i und dann aus (1) oder einfacher aus (2a, b) die c_i berechnen. Numerische Lösungen hierzu finden sich bei Willers, Methoden der praktischen Analysis, pag. 147.

Die Lösungen für

$$n = 2 \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3},\ c_{1,2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad n = 3 \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{5}\sqrt{15},\ \lambda_m = 0,\ c_{1,2} = \frac{5}{18},\ c_m = \frac{8}{18}$$

gestatten folgende einfache Konstruktion:

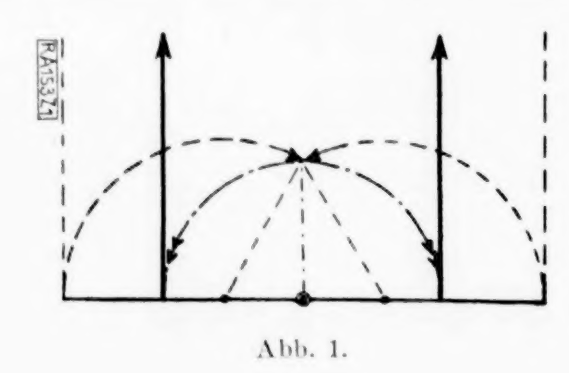


Abb. 1.

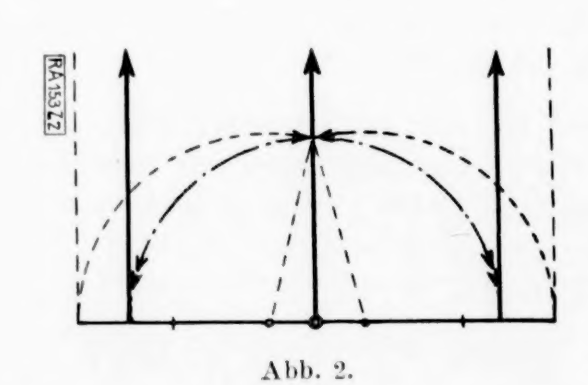


Abb. 2.

Man teile das Intervall in 3 bzw. 5 gleiche Teile, errichte über dem mittleren Teil mit den Außenteilen als Schenkeln das gleichschenklige Dreieck und trage dessen Höhe von ihrem Fußpunkt nach beiden Seiten auf der Grundlinie ab; das ergibt die Punkte x_1 und x_2, und die Formel

$$F \approx 2h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad\qquad F \approx 2h \cdot \frac{5y_1 + 8y_m + 5y_2}{18}$$

liefert eine Annäherung von 3. bzw. 5. Ordnung.

Die weiteren Lösungen

$$n = 4 \quad \lambda^2 = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35} \qquad\qquad n = 5 \quad \lambda^2 = \frac{35 \pm 2\sqrt{70}}{63}$$

sind praktisch kaum verwertbar.

Für **geringere Annäherung** $p < 2n$ mit dem Freiheitsgrad $2n - p$ ist die allgemeine Lösung der Gl. (1) oder (2a)(2b) anscheinend noch nicht versucht worden.

Der einfachste Fall ist eine Annäherung 3. Ordnung mit einem willkürlichen Parameter bei 3 symmetrischen Ordinaten. Die Gl. (2b) lauten hier

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1 - c_m}{2} \\ c_1 \lambda_1^2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \text{und geben aufgelöst} \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 = \pm\lambda \qquad && \lambda_m = 0 \\ &c_1 = \frac{1}{6\lambda^2} && c_m = 1 - \frac{1}{3\lambda^2}; \end{aligned}\right.$$

Daraus folgt z. B. für

$$\lambda = \frac{1}{2} \qquad c_1 = \frac{2}{3} \qquad c_m = -\frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{2}{3} \qquad c_1 = \frac{3}{8} \qquad c_m = \frac{2}{8}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad c_1 = \frac{1}{3} \qquad c_m = \frac{1}{3} \quad \text{(gleichwertige Ordinaten)}$$

$$\lambda = 1 \qquad c_1 = \frac{1}{6} \qquad c_m = \frac{4}{6} \quad \text{(Simpsonsche Regel).}$$

Bei Mitverwendung der beiden Grenzordinaten $\lambda_1 = \pm 1$ ist $2n - p = 2$; es läßt sich also eine Annäherung von der Ordnung $p - 1 = 2n - 3$ erzielen. Der einfachste dieser Fälle ist die Simpsonsche Regel $n = 3$. In den nächsten Fällen ist anzusetzen

$$n = 4 \qquad c_1 + c_2 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 + c_2\lambda_2^2 = \frac{1}{6}, \qquad c_1 + c_2\lambda_2^4 = \frac{1}{10},$$

$$n = 5 \qquad c_1 + c_2 = \frac{1 - c_m}{2}, \qquad c_1 + c_2\lambda_2^2 = \frac{1}{6}, \qquad c_1 + c_2\lambda_2^4 = \frac{1}{10}, \qquad c_1 + c_2\lambda_2^6 = \frac{1}{14};$$

das gibt aufgelöst

$$n = 4 \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 = \pm 1 \qquad && \lambda_2 = \pm\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ &c_1 = \frac{1}{12} && c_2 = \frac{5}{12} \end{aligned}\right. \qquad n = 5 \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 = \pm 1 \qquad && \lambda_2 = \pm\frac{1}{7}\sqrt{21} \qquad && \lambda_m = 0 \\ &c_1 = \frac{9}{180} && c_2 = \frac{49}{180} && c_m = \frac{64}{180}. \end{aligned}\right.$$

Die zugehörigen Konstruktionen sind leicht ausführbar:

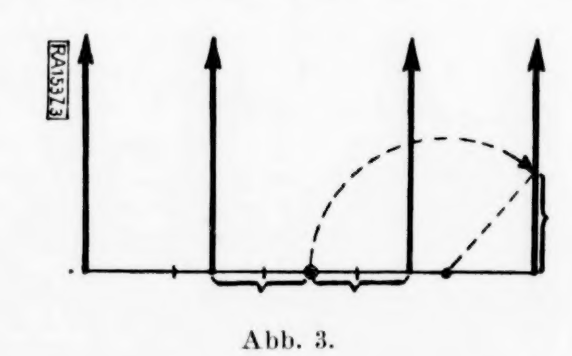


Abb. 3.

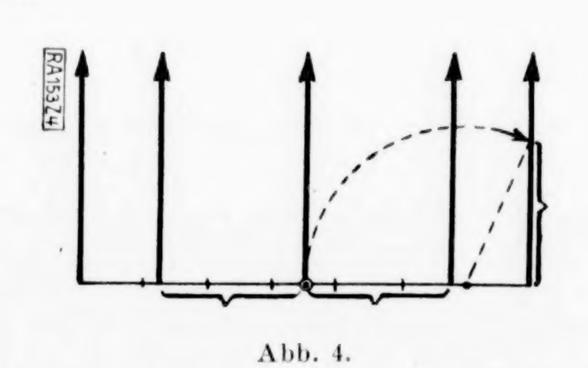


Abb. 4.

Man teile das Intervall in 5 bzw. 7 gleiche Teile und schlage um den einer Intervallgrenze benachbarten Teilpunkt den Kreis, der durch die Intervallmitte geht; dieser Kreis schneidet auf der einen Grenzordinate die Strecke ab, die von der Intervallmitte nach beiden Seiten abgetragen die Fußpunkte der Zwischenordinaten liefert. Die Formeln

$$F \approx 2h \cdot \frac{y_1 + 5y_2 + 5y_3 + y_4}{12} \qquad \text{bzw.} \qquad F \approx 2h \cdot \frac{9y_1 + 49y_2 + 64y_m + 49y_4 + 9y_5}{180}$$

ergeben dann eine Annäherung 5. bzw. 7. Ordnung.

Läßt man in den soeben aufgelösten Gleichungssystemen λ_2 als Parameter variabel unter Streichung der jeweils letzten Gleichung, so erhält man unendlich viele Annäherungen

3. Ordnung:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \pm 1 & \lambda_2 = \pm\lambda \\ c_1 = \dfrac{1-3\lambda^2}{6(1-\lambda^2)} & c_2 = \dfrac{1}{3(1-\lambda^2)} \end{cases}$$

Daraus folgt z. B. für

$\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad c_1 = \frac{1}{18}$ $\quad c_2 = \frac{8}{18}$

$\lambda = \frac{1}{3}$ $\quad c_1 = \frac{1}{8}$ $\quad c_2 = \frac{3}{8}$ (3 gleiche Intervalle)

$\lambda = 0$ $\quad c_1 = \frac{1}{6}$ $\quad c_2 = \frac{2}{6}$ (Simpsonsche Regel, c_2 zählt doppelt)

5. Ordnung:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \pm 1 & \lambda_2 = \pm\lambda & \lambda_m = 0 \\ c_1 = \dfrac{3-5\lambda^2}{30(1-\lambda^2)} & c_2 = \dfrac{1}{15\lambda^2(1-\lambda^2)} & c_m = \dfrac{-2+12\lambda^2-10\lambda^4}{15\lambda^2(1-\lambda^2)} \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{3}$ $\quad c_1 = \frac{11}{120}$ $\quad c_2 = \frac{81}{120}$ $\quad c_m = -\frac{64}{120}$

$\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad c_1 = \frac{7}{90}$ $\quad c_2 = \frac{32}{90}$ $\quad c_m = \frac{12}{90}$ (4 gleiche Intervalle)

$\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $\quad c_1 = \frac{2}{30}$ $\quad c_2 = \frac{9}{30}$ $\quad c_m = \frac{8}{30}$

$\lambda = \frac{2}{3}$ $\quad c_1 = \frac{14}{300}$ $\quad c_2 = \frac{81}{300}$ $\quad c_m = \frac{110}{300}$

$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad c_1 = \frac{1}{30}$ $\quad c_2 = \frac{8}{30}$ $\quad c_m = \frac{12}{30}$.

Verfügt man im voraus über sämtliche λ der Ordinatenfußpunkte, so wird im allgemeinen $2n - p = n$; die erreichbare Annäherung ist dann nur von der Ordnung $p - 1 = n - 1$, bei symmetrischer Verteilung einer ungeraden Anzahl von Ordinaten jedoch wegen (2 b) von der Ordnung $p - 1 = n$.

Legt man nur m Ordinaten im voraus fest, so läßt sich mit den Gl. (1) eine Annäherung von der Ordnung $p - 1 = 2n - m - 1$ erzielen. Im einfachsten Falle erhält man zu einer festen Ordinate λ_1 aus den ersten drei Gl. (1) die Annäherungen 2. Ordnung mit 2 Ordinaten

$$\lambda_1 = \lambda_1 \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{3\lambda_1} \qquad c_1 = \frac{1}{1+3\lambda_1^2} \qquad c_2 = \frac{3\lambda_1^2}{1+3\lambda_1^2}$$

z. B.

$$\lambda_1 = \pm 1 \qquad \lambda_2 = \mp\frac{1}{3} \qquad c_1 = \frac{1}{4} \qquad c_2 = \frac{3}{4}$$

$$\lambda_1 = \pm\frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = \mp\frac{2}{3} \qquad c_1 = \frac{4}{7} \qquad c_2 = \frac{3}{7}.$$

Besonders das erste Beispiel dürfte in manchen Fällen praktisch verwendbar und ausreichend sein: Zieht man bei gegebener Grenzordinate y_1 in $\frac{2}{3}$ Intervallbreite Abstand die zweite Ordinate y_2, so gibt die Formel

$$F \approx 2h \cdot \frac{y_1 + 3y_2}{4}$$

eine Annäherung 2. Ordnung.

RA15375

Abb. 5.

Man erhält z. B. bei graphischer Auswertung von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{\pi}{3} \qquad y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad F \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 1{,}02$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \qquad y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{1}{2} \qquad F \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{8} \approx 0{,}98$

Zu mehrfacher Anwendung bei Unterteilung des Intervalles eignen sich von den angeführten Formeln besonders die mit gleichen Intervallteilen

$$n=4 \qquad \lambda_2=\frac{1}{3} \qquad c_1=\frac{1}{8} \qquad c_2=\frac{3}{8} \qquad \text{Annäherung 3. Ordnung}$$

$$n=5 \qquad \lambda_2=\frac{1}{2} \qquad c_1=\frac{7}{90} \qquad c_2=\frac{32}{90} \qquad c_m=\frac{12}{90} \qquad \text{„ 5. „}$$

und die mit gleichwertigen Ordinaten

$$\left.\begin{array}{ll} n=2 & \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ n=3 & \lambda=\sqrt{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \text{Annäherung 3. Ordnung}$$

$$n=4 \qquad \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}} \qquad \text{Annäherung 5. Ordnung}$$

$$n=5 \qquad \lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(5\pm\sqrt{11})} \qquad \text{„ 7. „}$$

Abb. 6.

Für $n=2$ ist die Konstruktion in Abb. 1 angegeben; für $n=3$ zeigt sie die einfache Abb. 6; für höhere n wird der Vorteil großer Annäherung durch die umständliche Konstruktion aufgehoben. 153

KLEINE MITTEILUNGEN

Über die angenäherte numerische Lösung des Problems der Wärmeleitung. In dieser Mitteilung betrachten wir die Aufgabe der Ermittelung der Funktion u, die im Innern eines einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen liegenden Bereiches der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u=0$ genügt und auf dem Rande des Bereiches der Randbedingung

$$h u+k\frac{\partial u}{\partial n}=f \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

unterworfen ist. h, k und f sind gegebene Funktionen, u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ sind die Randwerte der gesuchten Funktion und ihrer Ableitung nach der äußeren Normale. Dabei soll durchweg $h k \geq 0$ und $h+k \neq 0$ sein, damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert werden können[1]).

Um diese Randwertaufgabe zu lösen, benutzen wir eine Methode, die in bekannten Arbeiten der Herren Courant, Friedrichs, Gerschgorin, Lewy, Liebmann, Runge und Wolf entwickelt ist, und die Differentialgleichung $\Delta u=0$ durch eine entsprechende partielle Differenzengleichung ersetzt; nachfolgende, irgendeines (z. B. des Liebmannschen) Verfahrens benützende Auswertung der Funktion, die jener Differenzengleichung genügt, gibt die angenäherten Werte der gesuchten Funktion u für die Gitterpunkte, welche im Innern des Bereiches liegen.

Das von uns angewandte Iterationsverfahren ist demjenigen von Herrn Wolf[2]) für die Lösung des Neumannschen Problems ähnlich.

1. Das Auslösungsverfahren. Es sei irgendein Bereich gegeben, dessen Rand aus Ecken und Seiten des Gitters gebildet wird. Die Seite des Gitterquadrats wählen wir zur Längeneinheit.

[1]) Vgl. Frank u. Mises, Differentialgleichungen der Physik, 2. Aufl. I S. 662.
[2]) Diese Zeitschr., Bd. 6 (1926) S. 118—150.

Wir bezeichnen mit r die Randwerte der Funktion Φ, die der Differenzengleichung

$$\Delta_{xx}\Phi+\Delta_{yy}\Phi=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

genügt, und mit w die benachbarten Funktionswerte auf dem ersten Innenring von Gitterpunkten (Abb. 1).

Dann ist

$$w=r+d \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo die Steigung d der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}$ (nach der inneren Normale gerichtet) oder $-\frac{\partial \Phi}{\partial n_a}$ proportional ist.

$$d \approx c\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \approx -c\frac{\partial \Phi}{\partial n_a}\,; \quad c>0\,.$$

Die Randbedingung (1) kann man in folgender Weise schreiben:

$$h r-\varkappa d=f\,; \left(\varkappa=\frac{k}{c}\right). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} h r-\varkappa(w-r)=f \\ (h+\varkappa) r-\varkappa w=f \\ r=\dfrac{f+\varkappa w}{h+\varkappa} \end{array}\right\} \ldots \quad (4).$$

Wir wollen die dieser Randbedingung genügende Funktion Φ durch sukzessive Annäherungen ermitteln.

Es sei Φ_n die n-te Näherungsfunktion, r_n und w_n seien entsprechende Werte von r und w. Dann

bestimmen wir die Randwerte r_{n+1} von Φ_{n+1} in folgender Weise:

$$r_{n+1} = \frac{f + \varkappa w_n}{h + \varkappa}.$$

Mit diesen Randwerten r_{n+1} lösen wir das Dirichletsche Problem, d. h. wir finden Φ_{n+1} und bestimmen folglich die w_{n+1}. Dann wird

$$r_{n+2} = \frac{f + \varkappa w_{n+1}}{h + \varkappa}$$

usw.

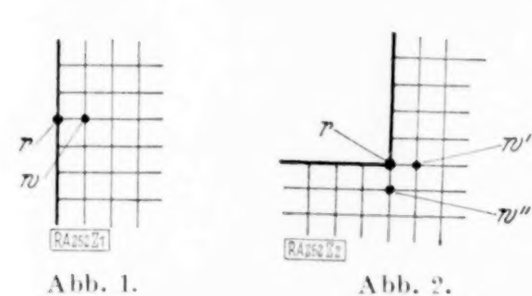


Abb. 1. Abb. 2.

In einspringenden Ecken des Randes definieren wir, nach Herrn Wolf[3]),

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}(r'_{n+1} + r''_{n+1}),$$

wo

$$r'_{n+1} = \frac{f + \varkappa w'_n}{h + \varkappa}$$

$$r''_{n+1} = \frac{f + \varkappa w''_n}{h + \varkappa}$$

ist (Abb. 2).

Wir zeigen nun, daß die Folge r_n gegen r konvergiert, wobei r und das entsprechende w der Bedingung (4) genügen. Dann folgt elementar, daß die Folge Φ_n gegen die gesuchte Funktion Φ mit den Randwerten r konvergiert.

2. Konvergenzbeweis. Der Beweis wird vollbracht, indem wir zeigen, daß im Fall der homogenen Randbedingung ($f = 0$)

$$\varrho = \frac{\varkappa \varphi}{h + \varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

(wo ϱ und φ die zu diesem Fall gehörigen r und w bedeuten) die Anwendung unseres Verfahrens

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ergibt[4]), und daß die erhaltene Lösung mit den Randwerten $\varrho = 0$ die einzige ist. Daraus folgt die Existenz der Lösung Φ der Gl. (1') und die Konvergenz von r_n gegen das zugehörige r.

In der Tat, falls wir festgestellt haben, daß $\Phi = 0$ für die homogene Randbedingung (5) die einzige Lösung der Gl. (1') ist, so können wir nach dem Hauptsatz der Theorie der linearen Gleichungen behaupten, daß es für die inhomogene Randbedingung eine eindeutige Lösung gibt[5]).

[3]) l. c. S. 135.

[4]) In diesem Fall ist $\varrho_{n+1} = \frac{\varkappa \varphi_n}{h + \varkappa}$.

[5]) Die Aufgabe der Auffindung einer Funktion Φ, welche der Gleichung (1') mit der Randbedingung (5) genügt, ist der Lösung des linearen Systems

$$z_{n1} + z_{n2} + z_{n3} + z_{n4} - 4 z_{n5} = 0 \quad \ldots \quad (I)$$

$$h_{r1} z_{r1} + k_{r1}(z_{w1} - z_{r1}) = f_{r1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II),$$

äquivalent, wobei die Gleichungen vom Typus (I) den inneren Punkten des Bereiches und diejenigen vom Typus (II) den Randpunkten entsprechen. Setzen wir $f_{rk} = 0$, so erhalten wir ein homogenes System, und wenn $z_{nk} = 0$ seine einzige Lösung ist, so hat das zugehörige inhomogene System auch eine und zwar nur eine Lösung. (Vgl. Courant, Friedrichs, Lewy. M. A. Bd. 100, S. 38.)

Diese Lösung sei mit Φ, die zugehörigen Randwerte mit r bezeichnet. Wenn wir dann

$$\varrho_n = r_n - r, \quad \varphi_n = w_n - w$$

setzen und auf ϱ_n unser Verfahren anwenden, kommen wir zum Fall der homogenen Bedingung:

$$r + \varrho_{n+1} = \frac{f + \varkappa(w + \varphi_n)}{h + \varkappa}$$

$$r + \varrho_{n+1} = \frac{f + \varkappa w}{h + \varkappa} + \frac{\varkappa \varphi_n}{h + \varkappa}$$

$$\varrho_{n+1} = \frac{\varkappa \varphi_n}{h + \varkappa};$$

gilt dabei (6), so folgt

$$\lim_{n \to \infty} (r_n - r) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} r_n = r.$$

Wir müssen also zeigen, daß im Fall der homogenen Randbedingung

$$\varrho = \frac{\varkappa \varphi}{h + \varkappa}$$

wir für die Gl. (1') die einzige Lösung

$$\Phi = 0$$

erhalten.

Wir setzen $\frac{\varkappa}{h + \varkappa} = \alpha$. Dann gibt die Anwendung unseres Verfahrens

$$\varrho_{n+1} = \alpha \varphi_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Wegen den h und $\varkappa$ auferlegten Bedingungen ist

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Den Fall, daß auf dem ganzen Rande $\alpha = 1$ (Neumannsches Problem) ist, erörtern wir hier nicht und beschränken uns nur auf Fälle, wo in mindestens einem Randpunkt $\alpha < 1$ ist.

Es sei zunächst $\alpha < 1$ auf dem ganzen Rande. Wir setzen

$$\max \alpha = A \qquad (0 < A < 1)$$

$$\max |\varphi_n| = A_n$$

$$\max |\varrho_n| = M_n.$$

Eine der Gl. (1') genügende Funktion kann ihren Maximal- sowie Minimalwert nur am Rande erreichen[6]). Deshalb ist

$$A_n \leq M_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Anderseits folgt aus (7) und (8)

$$|\varrho_{n+1}| = \alpha |\varphi_n|$$

und

$$M_{n+1} \leq A A_n.$$

Wegen (9) folgt daher

$$M_{n+1} \leq A M_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und

$$M_n \leq A^n M_0.$$

Folglich ist

$$\lim_{n \to \infty} M_n = 0,$$

und deswegen auch

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n = 0.$$

[6]) Vgl. Liebmann, Münchener Sitzgs.-Ber. 1918.

Die Eindeutigkeit kann leicht festgestellt werden, wenn wir die Existenz einer von Null verschiedener Lösung $\tilde{\varrho}$ voraussetzen und

$$\varrho_1 = \tilde{\varrho}$$

annehmen. Dann wird offenbar auch

$$\varrho_n = \tilde{\varrho}$$

und (10) wird nicht erfüllt. Für $\alpha < 1$ ist der Beweis damit erledigt.

Für den Fall $\alpha \leq 1$ bleibt die Beweisanordnung bestehen, mit dem Unterschied, daß statt A nun eine andere Zahl γ,

$$A < \gamma < 1$$

genommen werden muß.

Für den Neumannschen Fall ($\alpha = 1$ auf dem ganzen Rande) kann der Beweis nicht auf die angegebene Weise durchgeführt werden und erfordert Nebenbedingungen ($\Sigma\,(w - r) = 0$ über den Rand). Der für diesen Fall von Herrn Wolf[7]) gegebene Beweis für die Konvergenz seines Iterationsverfahrens setzt die Existenz der Lösung des Problems voraus, die Herr Wolf nicht beweist[8]).

3. **Ein numerisches Beispiel.** Als Beispiel behandeln wir folgende Aufgabe:

Den Temperaturzustand der Ecke einer Ziegelsteinwand bei konstanter Temperatur des Innenraums $T = 40^0$ C und konstanter Außentemperatur $t = 0^0$ C zu untersuchen.

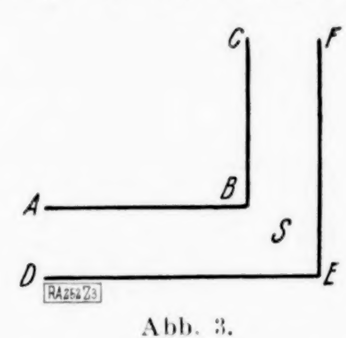


Abb. 3.

Diese Aufgabe führt zu folgendem Problem der Wärmeleitung: Die harmonische Funktion u im Bereiche S (Abb. 3) zu bestimmen, mit den Randbedingungen:

$$20{,}0\,u + 0{,}6\,\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

für die äußere Fläche (DEF) der Wand und

$$7{,}5\,u + 0{,}6\,\frac{\partial u}{\partial n} = 300{,}0$$

für die innere Fläche (ABC).

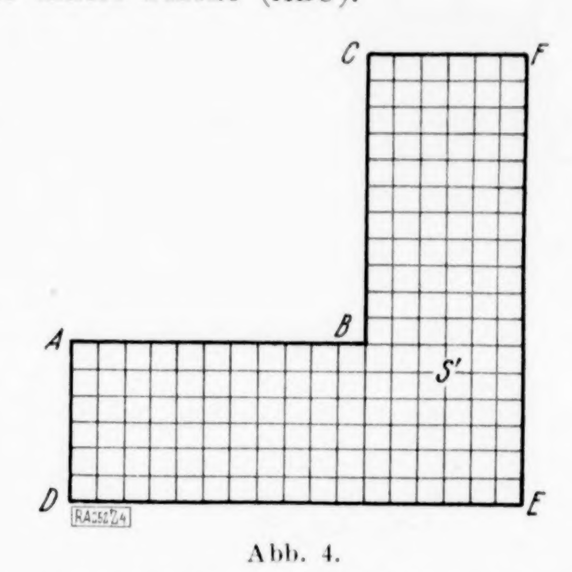


Abb. 4.

Um diese Funktion tatsächlich zu berechnen, betrachten wir statt des Bereiches S einen neuen Bereich S' (Abb. 4) mit passend abgeänderten Randbedingungen. Diese Randbedingungen lauten:

$$7{,}5\,r - 9{,}6\,d = 300{,}0 \qquad (d = w - r) \qquad (11)$$

für (ABC) und

$$20{,}0\,r - 9{,}6\,d = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (12)$$

für (DEF).

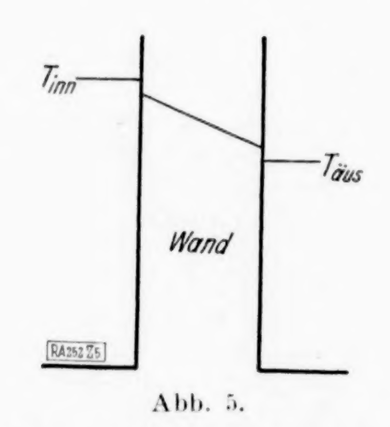


Abb. 5.

Auf den Seiten (AD) und (CF) geben wir einfach die Randwerte r an, die man leicht der Betrachtung des Wärmezustandes der unbegrenzten Wand entnehmen kann. Es ist bekannt, daß in diesem Falle die Temperatur der Wand geradlinig abfällt (Abb. 5); diese Temperaturverteilung ist als erste Annäherung bei unserer Berechnung angenommen.

7) l. c.

8) Dank einer liebenswürdigen Mitteilung von Herrn A. N. Tychonoff habe ich erfahren, daß er einen Beweis für die Konvergenz des Wolfschen Verfahrens bei der Annahme $\Sigma\,(w - r) = 0$ gefunden hat, der die Existenz der Lösung nicht voraussetzt, und sie folglich beweist.

Zahlentafel I.

33,40	33,40	33,39	33,38	33,34	33,26	33,17	33,01	32,75	32,33	31,67	30,50					
28,25	28,24	28,24	28,20	28,12	28,00	27,84	27,55	27,10	26,35	25,17	23,10	19,06				
23,10	23,10	23,08	23,03	22,93	22,80	22,60	22,20	21,67	20,82	19,57	17,71	15,04	12,12			
17,95	17,95	17,93	17,88	17,78	17,62	17,40	17,05	16,50	15,72	14,65	13,20	11,32	9,24	7,11		
12,80	12,80	12,78	12,73	12,65	12,50	12,30	12,01	11,57	10,96	10,16	9,13	7,86	6,47	5,01	3,55	
7,65	7,64	7,63	7,60	7,54	7,45	7,30	7,10	6,83	6,45	5,96	5,35	4,63	3,82	2,97	2,11	1,25
2,47	2,47	2,47	2,46	2,44	2,42	2,36	2,30	2,22	2,09	1,93	1,73	1,50	1,24	0,96	0,68	0,40

Die Zahlentafel I gibt die Resultate der Rechnung[9]), die nach den aus den Randbedingungen (11) und (12) entspringenden Formeln

$$r_{n+1} = 17{,}55 + 0{,}561\, w_n$$

für (ABC) und

$$r_{n+1} = 0{,}324\, w_n$$

für (DEF), durchgeführt worden ist; die Randwerte auf den Seiten (AD) und (CF) blieben während der ganzen Rechnung unverändert.

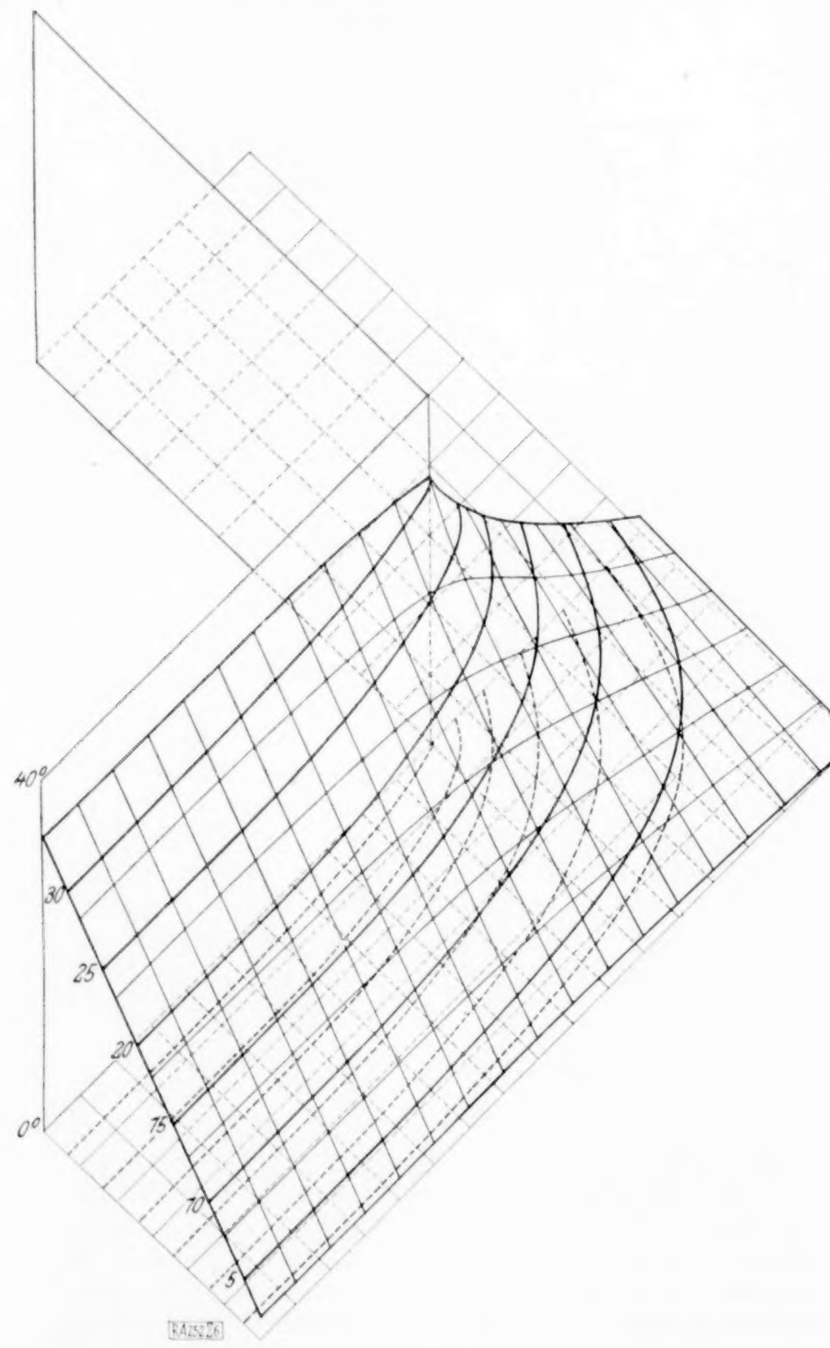


Abb. 6.

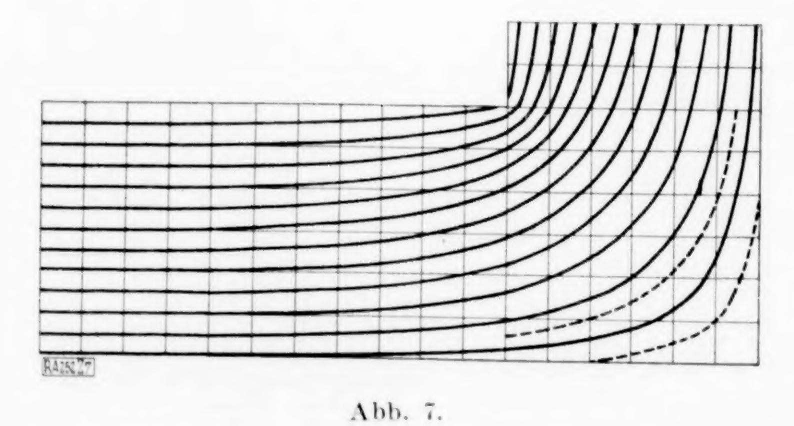


Abb. 7.

Die Abb. 6 stellt die gewonnene Temperaturverteilung und die Abb. 7 die Isothermen im Innern der Wand dar.

Moskau. D. Panow. 252

[9]) Alle Rechnungen hat Herr A. Chochloff durchgeführt.

On Some Many-Valued Solutions of the Equations of Elastic Equilibrium in Polar Coordinates. 1. If a body occupying a multiply-connected region be dissected along a system of barriers which should be introduced to make the space occupied by the body simply-connected and if one of the faces of the dissected body formed by each barrier be displaced relatively to the other by a small rigid-body displacement and then the opposite faces joined by removal or insertion of thin slices of matter of the same kind as that of the body, then the new body so formed will be in a state of initial stress. The stress and the strain produced in the body must be single-valued and continuous but the displacements would be discontinuous in crossing a barrier. That such displacements can be expressed by many-valued functions was first pointed out by Weingarten[1]), whose theory was further developed by Volterra and Cesaro. Consequently any many-valued solution of the equations of elastic equilibrium of a body occupying a multiply-connected region, can be applied to the problem of dislocation of that body, provided that the stress and strain calculated from such a solution are single-valued and continuous and the discontinuities of the displacements at each barrier represent a displacement possible in a rigid body. In the present paper, many-valued solutions have been obtained, of the equations of equilibrium in polar coordinates, and applied to problems of dislocation of a portion of a spherical shell occupying a multiply-connected space.

2. The equations of equilibrium of an elastic solid under no body forces referred to polar coordinates, in terms of dilatation and rotation are[2])

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,\frac{\partial \Delta}{\partial \Theta} - 2\mu \\
&\qquad\qquad \left\{\frac{\partial \widehat{\omega} r}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\widehat{\omega}_\Phi\,\mathrm{Sin}\,\Theta\right)\right\} = 0 \\
&(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\Theta}\,\frac{\partial \Delta}{\partial \Phi} - 2\mu \\
&\qquad\qquad \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\widehat{\omega}_\Theta\right) - \frac{\partial \widehat{\omega} r}{\partial \Theta}\right\} = 0 \\
&(\lambda+2\mu)\,r\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,\frac{\partial \Delta}{\partial r} - 2\mu \\
&\qquad\qquad \left\{\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\widehat{\omega}_\Phi\,\mathrm{Sin}\,\Theta\right) - \frac{\partial \widehat{\omega}_\Theta}{\partial \Phi}\right\} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

where[3])

$$\left.\begin{aligned}
\Delta = \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sin}\,\Theta}&\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\,\mathrm{Sin}\,\Theta\right) + \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(r\,u_\Theta\,\mathrm{Sin}\,\Theta\right)\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(r\,u_\Phi\right)\right\}
\end{aligned}\right\} (2)$$

and

$$\left.\begin{aligned}
2\,\widehat{\omega}_r &= \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sin}\,\Theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(r\,u_\Phi\,\mathrm{Sin}\,\Theta\right) - \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(r\,u_\Theta\right)\right\} \\
2\,\widehat{\omega}_\Theta &= \frac{1}{r\,\mathrm{Sin}\,\Theta}\left\{\frac{\partial u r}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_\Phi\,\mathrm{Sin}\,\Theta\right)\right\} \\
2\,\widehat{\omega}_\Phi &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_\Theta\right) - \frac{\partial u r}{\partial \Theta}\right\}
\end{aligned}\right\} (3).$$

[1]) For full reference on the subject see Love's Theory of Elasticity (3 rd. ed.) p. 219.
[2]) Love, loc. cit. p. 139.
[3]) Love, loc. cit. p. 56.

We have also the equations[4])

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla^2 \Delta = 0\,, & \nabla^2 (r\,\widehat{\omega}_r) = 0 \\ \text{and} & \\ \mu \nabla^2 (r u_r) + (\lambda + \mu)\, r \dfrac{\partial \Delta}{\partial r} - 2\mu\Delta = 0 & \end{array}\right\} \quad . \quad (4).$$

The strain coefficients are given by[5])

$$\left.\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\Theta\Theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{u_r}{r} \\ e_{\Phi\Phi} &= \frac{1}{r \operatorname{Sin}\Theta}\frac{\partial u_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{u_\Theta}{r}\cot\Theta + \frac{u_r}{r} \\ e_{\Theta\Phi} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\Phi}{\partial \Theta} - u_\Phi \cot\Theta\right) + \frac{1}{r\operatorname{Sin}\Theta}\frac{\partial u_\Theta}{\partial \Phi} \\ e_{\Phi r} &= \frac{1}{r\operatorname{Sin}\Theta}\frac{\partial u_r}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_\Phi}{\partial r} - \frac{u_\Phi}{r} \\ e_{r\Theta} &= \frac{\partial u_\Theta}{\partial r} - \frac{u_\Theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \Theta} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

3. If we assume that $u_\Phi = \Phi f(r, \Theta)$ and u_r, u_Θ to be independent of Φ, we have

$$\left.\begin{aligned} 2\,\widehat{\omega}_r &= \frac{\Phi}{r\operatorname{Sin}\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(f \operatorname{Sin}\Theta) \\ &= \frac{\Phi\chi}{r} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

where

$$\chi = \frac{1}{\operatorname{Sin}\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(f\operatorname{Sin}\Theta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Substituting for $\widehat{\omega}_r$ in (4), we find that χ satisfies the equation

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\chi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{Sin}\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\operatorname{Sin}\Theta\frac{\partial\chi}{\partial\Theta}\right) = 0$$

of which a solution is known to be

$$\chi = -\left(A r^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right) P_n(\mu) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

where P_n is Legendre's coefficient of nth degree and $\mu = \cos\Theta$.

Hence

$$f \operatorname{Sin}\Theta = \left(A r^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right)\int P_n(\mu)\,\partial\mu$$

or f can be written as

$$f = \left(C r^n + \frac{D}{r^{n+1}}\right)\operatorname{Sin}\Theta\frac{\partial P_n}{\partial\mu} \quad . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Therefore

$$u_\Phi = \Phi\left(C r^n + \frac{D}{r^{n+1}}\right)\operatorname{Sin}\Theta\frac{\partial P_n}{\partial\mu} \quad . \; . \; . \quad (10a).$$

With the above value of u_Φ and

$$u_r = 0 \text{ and } u_\Theta = \frac{1}{\operatorname{Sin}\Theta}\left(C r^n + \frac{D}{r^{n+1}}\right) P_n \quad . \quad (10b),$$

we have

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ 2\,\widehat{\omega}_r &= n(n+1)\left(C r^{n-1} + \frac{D}{r^{n+2}}\right)\Phi P_n \\ 2\,\widehat{\omega}_\Theta &= \left[-(n+1)\,C r^{n-1} + \frac{nD}{r^{n+2}}\right]\Phi\operatorname{Sin}\Theta\frac{\partial P_n}{\partial\mu} \\ 2\,\widehat{\omega}_\Phi &= \left[(n+1)\,C r^{n-1} - \frac{nD}{r^{n+2}}\right]\frac{1}{\operatorname{Sin}\Theta}P_n \end{aligned}$$

so that the equations (1) are satisfied.

We see from (5) that the strain coefficients and consequently the stresses are many-valued unless $n = 1$ and $D = 0$.

For single-valued stresses therefore we must take

$$u_r = 0, \quad u_\Theta = C r \cot\Theta, \quad u_\Phi = C\Phi r \operatorname{Sin}\Theta \quad (11)$$

and therefore

$$\left.\begin{aligned} &e_{rr} = 0, \quad e_{\Theta\Theta} = -C\operatorname{cosec}^2\Theta, \\ &e_{\Phi\Phi} = C\operatorname{cosec}^2\Theta, \quad e_{\Theta\Phi} = e_{\Phi r} = e_{r\Theta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12),$$

so that

$$\widehat{rr} = \widehat{r\Theta} = \widehat{r\Phi} = 0$$

everywhere.

The solution therefore applies to a spherical shell, the spherical surfaces being free from traction. Since u_Θ is infinite when $\Theta = 0$ and $\Theta = \pi$, it is obvious that we should exclude the portions containing $\Theta = 0$ and $\Theta = \pi$ from the shell. The displacement is many-valued and continuous; it can be made one-valued if we make the convention $2\pi + \alpha > \Phi > \alpha$, but it then becomes discontinuous, u_Φ suddenly decreasing by the amount $2\pi C r \operatorname{Sin}\Theta$ as Φ changes from $2\pi + \alpha$ to α. Since this change in u_Φ is proportional to $r\operatorname{Sin}\Theta$, there is a dislocation, equivalent to the removal of a thin slice bounded by the planes $\Phi = \alpha \mp 2\pi C$, and subsequent joining of the plane faces so formed.

If we assume the shell to be bounded by conical surfaces $\Theta = \Theta_0$ and $\Theta = \Theta_1$, the above displacement requires for its maintenance, normal tractions on the conical surfaces of amounts $-2\mu C\operatorname{cosec}^2\Theta_0$ and $-2\mu C\operatorname{cosec}^2\Theta_1$ respectively.

4. For a parallel fissure, let us take the displacement given by

$$\left.\begin{aligned} u_r &= A\Phi\operatorname{Sin}\Theta\operatorname{Sin}\Phi - \frac{A\cos\Phi}{\operatorname{Sin}\Theta} \\ u_\Theta &= A\Phi\cos\Theta\operatorname{Sin}\Phi + \frac{A\cos\Theta\cos\Phi}{\operatorname{Sin}^2\Theta} \\ u_\Phi &= A(\Phi\cos\Phi + \operatorname{Sin}\Phi) + \frac{A\operatorname{Sin}\Phi}{\operatorname{Sin}^2\Theta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13).$$

Then we have

$$\Delta = 0, \quad \widehat{\omega}_r = \widehat{\omega}_\Theta = \widehat{\omega}_\Phi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14),$$

so that the equations (1) are satisfied. Calculating the strain-coefficients from (13) we have

$$\left.\begin{aligned} &e_{rr} = 0, \quad e_{\Theta\Theta} = -\frac{2A\cos\Phi}{r\operatorname{Sin}^3\Theta}, \\ &e_{\Phi\Phi} = \frac{A(1+\cos^2\Theta)\cos\Phi}{r\operatorname{Sin}^3\Theta} \\ &e_{\Theta\Phi} = -\frac{4A\cos\Theta\operatorname{Sin}\Phi}{r\operatorname{Sin}^3\Theta}, \quad e_{\Phi r} = e_{r\Theta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (15),$$

so that

$$\widehat{rr} = \widehat{r\Theta} = \widehat{r\Phi} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

---

[4]) Love, loc. cit. p. 139.
[5]) Love, loc. cit. p. 56.

We can therefore apply this solution to a spherical shell whose surfaces are free from traction. The portions containing $\Theta = 0$ and $\Theta = \pi$ are excluded, as is obvious from (13), by conical surfaces $\Theta = \Theta_0$ and $\Theta = \Theta_1$. The displacement is many-valued and continuous, but if we restrict Φ so that $2\pi > \Phi > 0$, the displacement becomes single-valued and discontinuous. Taking only the multiply-valued terms in the displacement, we have when $\Phi = 0$

$$u_r = u_\Theta = u_\Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17a)$$

and when $\Phi = 2\pi$

$$u_r = u_\Theta = 0, \quad u_\Phi = 2\pi A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17b).$$

Therefore u_r, u_Θ are continuous in crossing the barrier at $\Phi = 0$, while u_Φ changes suddenly by the amount $-2\pi A$ as Φ changes from 2π to 0. There is therefore a dislocation due to removal of a slice of thickness $2\pi A$ at $\Phi = 0$. To maintain the displacement given by (13), suitable tractions must be applied to the conical surfaces $\Theta = \Theta_0$ and $\Theta = \Theta_1$.

Suddhodan Ghosh. 127.

University College of Science.
Calcutta.

Kurze Inhaltsangabe:

Über einige mehrdeutige Lösungen des elastischen Gleichgewichtsproblems in Polarkoordinaten.

Nach dem Grundgedanken der Weingartenschen Methode werden mehrdeutige Lösungen für ein Stück einer Kugelschale abgeleitet, das seitlich durch einen Konus begrenzt wird und dessen Kugelflächen spannungsfrei sind.

Ist Schrägüberschreiten der Fahrbahn gefährlich? Die Untersuchung dieser von E. Everling in Heft 1, Seite 60/61 dieses Bandes aufgeworfenen Frage kann dadurch erweitert werden, daß man das Überschreiten der ganzen Fahrbahn in Betracht zieht. Man findet nämlich, daß es unter festen gegebenen Umständen eine kleinste Geschwindigkeit gibt, mit der der Fußgänger (oder dgl.) die Straße überqueren muß, um noch vor dem herankommenden Fahrzeug auf die andere Seite zu gelangen, und daß diese kleinste Geschwindigkeit nur bei einem ganz bestimmten Schrägwinkel, nicht aber beim rechtwinkligen Überschreiten möglich ist.

In den Bezeichnungen schließe ich mich an die Mitteilung von Everling an. Zu den dort eingeführten kommen noch hinzu (Abb. 1) die in die Straßenrichtung fallende Komponente $e \cdot b$ der Entfernung FW (vom Fußgänger bis zum linken Vorderrad des Kraftwagens) und die freie Breite des Fahrdamms $f \cdot b$. In der Abbildung stellen die ausgefüllten Rechtecke die Anfangslage, die schraffierten die Endlage dar.

Man findet

$$\left[\frac{b\cdot(f+1)}{\cos\alpha} + p\cdot b\right] : k\cdot v = (e\cdot b + f\cdot b\cdot \operatorname{tg}\alpha) : v$$

und erhält daraus

$$k = \frac{f+1+p\cos\alpha}{e\cos\alpha + f\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

k ist am kleinsten, wenn

$$e\sin\alpha - f\cos\alpha = \frac{pf}{f+1},$$

d. h. wenn

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{f}{e} + \operatorname{arc\,sin}\frac{p\cdot f}{(f+1)\sqrt{e^2+f^2}} \quad . \quad . \quad (2)$$

ist.

Abb. 1. Abb. 2.

Besonders übersichtlich und bemerkenswert ist das Ergebnis, wenn man $p = 0$ setzt. Dieser Fall ist annähernd verwirklicht, wenn es sich um einen den Fahrdamm überschreitenden Fußgänger handelt. Es ist dann der zur kleinsten Geschwindigkeit gehörige Schrägwinkel

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{f}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Das bedeutet: Ein Fußgänger überschreitet die Fahrbahn vor einem herannahenden Fahrzeug am bequemsten, d. h. mit möglichst geringer Geschwindigkeit, wenn er im rechten Winkel zu der nach dem linken Vorderrad führenden Verbindungsgeraden geht. (Abb. 2.) Der zugehörige Geschwindigkeitskoeffizient ist

$$k_0 = \frac{f+1}{\sqrt{e^2+f^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ein Zahlenbeispiel sei mit $f = 3$, $e = 20$, a) $p = 1$, b) $p = 0$ angefügt:

a) Als günstigster Schrägwinkel ergibt sich aus (2)

$$\alpha = 8{,}53^0 + 2{,}13^0 = 10{,}66^0 .$$

Der erste Anteil würde dem Überschreiten senkrecht zu FW entsprechen, der zweite ist der Einfluß von p. Für k erhalten wir aus (1) den Wert 0,247. Bei einer Geschwindigkeit des Fahrzeugs von $v = 30$ km/h müßte demnach der Fahrdamm mit $kv = 7{,}4$ km/h überschritten werden.

b) Bei Vernachlässigung von p sind die entsprechenden Werte

$$\alpha_0 = 8{,}53^0$$
$$k_0 = 0{,}198 \sim 2 .$$

Die Mindestgeschwindigkeit ist dann bei $v = 30$ km/h

$$k_0 v \sim 6 \text{ km/h} .$$

Die vorstehende Untersuchung ist davon ausgegangen, daß der Fußgänger gerade noch vor dem Kraftwagen vorbeikommen soll. Um zur Sicherheit zwischen sich und das Fahrzeug noch eine gewisse Strecke $q \cdot b$ zu bringen, deren Vorhandensein in der Mitteilung von Everling vorausgesetzt wird, wird er mit einer größeren als der Mindestgeschwindigkeit den Fahrdamm überqueren, aber zweckmäßig unter dem günstigsten Schrägwinkel, wie er sich nach unserer Untersuchung ergibt. H. Heinrich. 276.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

PIETRO **BURGATTI**, Teoria matematica della elasticità. 3. Bd. der Analisi vettoriale generale e applicazioni. Verlag Nicola Zanichelli, Bologna 1931. VIII + 370 S.

Es handelt sich um den dritten Band eines umfassenden Werkes über die Vektoranalysis, dessen ersten Band, Transformazioni lineari Burali-Forti und Marcolongo, dessen zweiten Band, Fondamenti di Geometria differenziale Burgatti, Boggio und Burali-Forti, Bd. VI, Idrodinamica Boggio und Bd. V, Elettricità e magnetismo Marcolongo herausgeben. Vektoranalysis, insbesondere Tensorrechnung ist das durchgängig angewendete Hilfsmittel. Sie wird im wesentlichen vorausgesetzt, das einleitende Kapitel von etwa 50 Seiten repetiert das Wichtigste aus der Potentialtheorie. Die nächsten 60 Seiten sprechen von endlichen und unendlich kleinen Verschiebungen. Das folgende Kapitel, die Statik, ebenfalls etwa 60 Seiten lang, enthält die Statik und stellt den Schwerpunkt des Werkes dar. Der stark mathematischen Tendenz des Ganzen entsprechend finden sich hier neben der Aufstellung der Grundgleichungen die allgemeinen Theoreme, so die von Volterra und Somigliana, die Methoden von Green und Tedone, sowie das Reziprozitätstheorem von Betti. Den Schluß des Kapitels bildet ein Abriß über Thermoelastizität. Das nächste Kapitel bringt dann erst die wichtigsten Sonderfälle. Ein besonderes Kapitel ist den Problemen von Saint-Venant und Clebsch gewidmet. Es folgt die Theorie des Gleichgewichtes von dünnen Drähten und Platten. Ein ganz kurzes Kapitel über anisotrope Körper sagt von diesen wenigstens das Wichtigste, den Schluß bildet ein Kapitel über die Dynamik der elastischen Körper und schließt mit den Formeln von Kirchhoff, Poisson und dem Prinzip von Huyghens.

Man findet also das Wichtigste in dem Buch, es mangelt erfreulicherweise nicht an Literaturangaben, und wenn auch die italienische Literatur besonders beachtet wird, so fehlt doch nicht die bedeutende ausländische; die allerwichtigsten Begriffe sind viersprachig gegeben. Stichproben lassen das Buch korrekt und lesbar erscheinen. So verdient es auch in Deutschland Beachtung. Manche mehr mathematische Untersuchung, die es enthält, findet sich nicht in der bei uns gebräuchlichen Lehrbuchliteratur.

Berlin. Hamel. 264

S. **TIMOSHENKO**, Prof. der Technischen Mechanik an der Universität Michigan. Schwingungsprobleme der Technik. Ins Deutsche übertragen von Dr. I. Malkin, New York, und Dr. Elise Helly, Wien. VIII + 376 S. mit 183 Abb. im Text. Verlag Julius Springer, Berlin 1932. Preis geb. 26 M.

Die deutsche Ausgabe dieses Buches, das bereits früher in der Zamm. (Bd. 10, S. 202) eine eingehende Würdigung gefunden hat, ist sehr zu begrüßen, sowohl vom Standpunkt des Unterrichts aus als sicher auch für den praktisch arbeitenden Ingenieur. Sie konnte noch um einige Zusätze und Nachträge ergänzt werden, die Fragen des Maschinenausgleichs, Schwingungen bei konstanter Reibung, u. a. betreffen. Es dürfte in der Tat in der deutschen Literatur über den Gegenstand kein Lehrbuch geben, das einerseits so stark die prinzipiellen Gesichtspunkte der Mechanik ausnützt, andererseits doch überall die Probleme unmittelbar aus der technischen Wirklichkeit nimmt und dabei durch die knappe Form der Darstellung den Stoff so eingehend behandelt. Das Buch, das im Original bereits einen großen Erfolg hatte, kann auch in der deutschen Bearbeitung wärmstens empfohlen werden, auch sei noch die sprachliche Darstellung hervorgehoben, die nicht das Gefühl der Übersetzung aufkommen läßt. F. Noether. 285

Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 334. Heft: **Untersuchungen an der Dieselmaschine:** Der Spül- und Ladevorgang bei Zweitaktmaschinen. Von KURT **NEUMANN**.

Das Arbeitsverfahren raschlaufender Zweitakt-Vergasermaschinen. Von OTTO **KLÜSENER**. Berlin 1930, VDI-Verlag, 46 S. m. 72 Abb. Preis 8,50 M.

Die Untersuchungen von Neumann sind wie so viele vorhergegangene wärmstens zu begrüßen. Seit längerer Zeit sind ja gerade die hier behandelten Fragen besonders brennend, die zu überwindenden Schwierigkeiten verzögerten jedoch die endgültige Lösung. Nun ist aber eine befriedigende Übereinstimmung der mit den gewählten Annahmen erzielten Ergebnisse mit den Versuchswerten erreicht. Die klare und ins Einzelne gehende Darstellung der bei der Spülung auftretenden Vorgänge, die Ausführung genauer Versuche und ihre Erörterung, wobei manche überraschende Erscheinung festgestellt werden konnte, die Berücksichtigung auch geringerer, leicht zu übersehender Einwirkungen, wie etwa die Trägheitswirkung der Spülluft und der Auspuffgase, sind besonders hervorzuheben. Die technisch so reizvolle Aufgabe, bei nicht genau bekannten physikalischen Grundlagen dennoch die Wirklichkeit angenähert zu beherrschen, hat Neumann hier vorzüglich behandelt, eine Art zu arbeiten, die auch dem Unterzeichneten besonders sympathisch ist. Dadurch ist gewiß ein wesentlicher Fortschritt in der Erkenntnis der Erscheinungen in der Verbrennungsmaschine erzielt worden.

Auch die Arbeit von Klüsener ist ganz besonders lehrreich. Auch hier werden außerordentlich gründliche Berechnungen in glücklicher Weise mit Versuchsergebnissen verglichen und gezeigt, inwieweit die zugrunde gelegten Annahmen berechtigt sind. Man gewinnt dabei viele sehr wertvolle Einblicke, es wird eine Reihe von Fragen gelöst, allerdings werden auch neue aufgeworfen. Gelegentlich wird deutlich gezeigt, wo sich die Vorgänge im wirklichen Betrieb von Laboratoriumsversuchen unterscheiden und wo auch die sorgfältigsten Messungen Ungenauigkeiten zeigen müssen. Es ist bewundernswert, mit welcher Gründlichkeit und Kenntnis hier die kleinsten Einzelheiten berücksichtigt und durchdacht erscheinen.

Beide Aufsätze werden gewiß dem engeren Fachmanne und der einschlägigen Industrie zum Nutzen gereichen. Körner. 257

Prag am 8. Feber 1932.

Dr. HANS **PETER**, Privatdozent an der Universität Tübingen, Grenzen der Statistik in der Konjunkturforschung. Ein Beitrag zur Kritik der Wirtschaftsprognose. Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung, herausgeg. von Dr. Eugen Altschul. Heft 5, 73 S. Verlag Kurt Schroeder, Berlin 1930.

Bis vor kurzem herrschte in Deutschland nach amerikanischem Muster hohe Konjunktur für Konjunkturforschung. Man glaubte, mit Hilfe dieser

Methoden die Wirtschaft beherrschen, die Konjunktur stabilisieren oder mindestens die Krisen mildern, wenn nicht gar vermeiden zu können. Die wirtschaftliche Entwicklung der letzten Jahre hat diese Auffassung als Illusion erwiesen. Peter untersucht die Ursache dieses Versagens und reduziert sie auf das Verhältnis der Statistik zur Induktion: die heute herrschenden sozialökonomischen Lehren enthalten keine für diesen Zweck ausreichende Theorie, und keine ökonomische Statistik kann eine solche fehlende Theorie ersetzen. Statistische Gesetze wie in der Physik existieren zum mindesten in den herrschenden ökonomischen Lehren nicht. Insbesondere vermag niemand die mathematische Natur der konjunkturtheoretischen Hauptfunktion, des Trend, zu erkennen. Die ganzen rationalen Funktionen nten Grades können noch so schön als Interpolationsformeln passen; sie bieten keinerlei Sicherheit zur Extrapolation.

Die beschreibenden Methoden der Konjunkturforschung und speziell die Statistik können ohne Theorie somit nicht einmal sinnvoll angewendet werden. Auch der Ausweg in die Korrelation versagt, denn der Nachweis einer hohen Korrelation ist kein Beweis für einen realen, kausalen Zusammenhang. Somit lassen sich Prognosen auf statistische Untersuchungen allein nicht gründen. Denn hierfür benötigt man nicht nur die Kenntnis der Tatsache, daß eine Abhängigkeit besteht, sondern auch ihre Form. Der Verzicht auf Theorie macht die moderne Konjunkturforschung ebenso unfruchtbar, wie es seinerzeit die sogenannte historische Schule der Nationalökonomie war.

E. J. Gumbel (Heidelberg). 256

NACHRICHTEN

Internationaler Mathematikerkongreß Zürich 1932.

Wie in Heft 4 des Jahrgangs 1931 schon berichtet wurde, findet in Zürich vom 4. bis 12. September ein Internationaler Mathematikerkongreß statt. Aus der Liste der allgemeinen Vorträge seien die folgenden genannt: R. Wavre, L'aspect analytique du problème des figures planétaires, und S. Bernstein, Sur les liaisons entre quantités aléatoires. Von den zehn Sektionen, in denen die einzelnen Vorträge gehalten werden, betreffen fünf Teilgebiete der angewandten Mathematik, nämlich Sektion 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik, Sektion 5: Astronomie, Sektion 6: Mechanik und mathematische Physik und Sektion 7: Mathematisch-technische Wissenschaften. Rege Beteiligung seitens der Mitglieder unserer Gesellschaft an den Arbeiten des Kongresses ist sehr erwünscht.

Nutzbarmachung wissenschaftlicher Forschung für die Industrie.

Die Göttinger Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik haben unter dem Namen „Göttinger Vermittlungsstelle für ingenieurwissenschaftliche Untersuchungen" (Göttingen, Böttingerstraße 8) eine Organisation ins Leben gerufen, die auf breiter Basis unter Heranziehung mehrerer Forschungsstätten wissenschaftlich-technische Arbeiten im Interesse der Industrie auf Antrag der Interessierten ausführen soll. Sie will damit die in der Industrie vorhandenen Forschungsstätten ergänzen und die Durchführung von wissenschaftlichen Untersuchungen auch für mittlere und kleinere Betriebe ermöglichen. Göttingen ist für eine solche Vermittlungsstelle besonders geeignet, da hier eine große Zahl von Instituten mit ihren Mitarbeitern zur Verfügung stehen, die für solche Arbeiten besonders in Betracht kommen: Institut für angewandte Mechanik und Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung (Leiter: Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. L. Prandtl): Aerodynamische Versuchsanstalt (Leiter: Prof. Dr. A. Betz).

Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, daß das unter Leitung von Prof. v. Mises stehende Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin bestimmungsgemäß auch Arbeiten mathematischer Richtung für die Zwecke der Industrie oder anderer öffentlicher und privater Unternehmungen auf deren Antrag ausführt.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Für den 27. Mai war ein Vortrag von Herrn Priv.-Dozt. Dr. St. Bergmann (Berlin) über „Mehrdeutige Lösungen bestimmter Strömungsaufgaben" angekündigt. Er mußte wegen Erkrankung des Vortragenden verschoben werden.

Prager Mitglieder.

Am 21. April sprach Hr. Prof. Dr. W. Müller (Prag) über „Laminare Ausbreitungsvorgänge in zähen Flüssigkeiten".

Anläßlich seiner Ernennung zum Dr. techn. e. h. der Deutschen Technischen Hochschule in Prag hielt Hr. Prof. Dr. L. Prandtl (Göttingen) am 6. Mai in Prag einen Vortrag über „Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung".

Am 12. Mai sprach Hr. Prof. Bock (Brünn) über „Stabilisierung durch kleine Schwingungen".

Persönliches.

Hr. Dr. Johannes Picht (Berlin) habilitierte sich an der Technischen Hochschule Charlottenburg für das Fach der Optik.

Hr. Prof. ir. C. B. Biezeno (Delft) wurde anläßlich der 300-Jahr-Feier der Universität zu Amsterdam von der Philosophischen Fakultät zum Dr. h. c. ernannt.

Hr. Prof. Dr.-Ing. W. Gehler (Dresden) ist von der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn zum Dr. Ing. e. h. ernannt worden.

Hr. Prof. Dr. Suslow (Odessa) feiert am 31. Mai das fünfzigjährige Jubiläum seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Tätigkeit auf dem Gebiete der Mechanik. 284

Hr. Dr.-Ing. Kurt Hohenemser habilitierte sich an der Universität Göttingen für das Fach der angewandten Mathematik und Mechanik.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — Copyright 1932 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.